

Raisonnement par récurrence

1ère étape : Initialisation On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. ($n=0$ ou $n=1$ en général)

2ème étape : Hérité On suppose que la propriété est vraie pour un rang n fixé de \mathbb{N} et on démontre qu'elle est vraie au rang $n+1$.

3ème étape : Conclusion On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vocabulaire et méthodes sur les suites

Etudier la monotonie d'une suite, c'est étudier son sens de variation.

On peut utiliser un raisonnement par récurrence.

On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Si $U_n = f(n)$, alors on peut étudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

Suites arithmétiques

Si (U_n) est arithmétique, chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée raison.

Formule de récurrence: $U_{n+1} = U_n + r$

Formules explicites: $U_n = U_0 + r \times n$ ou $U_n = U_1 + r \times (n-1)$ (si U_1 est le premier terme)

Somme des termes consécutifs: $(\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})) / 2$

Suites géométriques

Si (U_n) est géométrique, chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un facteur constant appelé raison

Formule de récurrence: $U_{n+1} = U_n \times q$

Formules explicites: $U_n = U_0 \times q^n$ ou $U_n = U_0 \times q^{n-1}$ (si U_1 est le premier terme)

Somme des termes consécutifs: premier terme $\times (1 - q^{\text{nombre de termes}}) / (1 - q)$

Exemple 1

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = U_n + 2n + 2$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2 + n - 1$

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. Pour $n=0$: $0^2 + 0 - 1 = -1$ et $U_0 = -1$

On suppose que la propriété est vraie pour un rang n fixé de \mathbb{N} : $U_n = n^2 + n - 1$ et on démontre qu'elle est vraie au rang $n+1$:
 $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1$

On sait que $U_{n+1} = U_n + 2n + 2 = n^2 + n - 1 + 2n + 2 = n^2 + 3n + 1$

On développe: $(n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1$

On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2 + n - 1$

Exemple 2

(U_n) est définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 90$ et $U_1 = 0.85U_0 + 6$. Démontrer par récurrence que (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. On calcule $U_1 = 0.85 \times 90 + 6 = 82.5$ donc $U_1 < U_0$

On suppose que la propriété $U_{n+1} \leq U_n$ est vraie pour un rang n fixé de \mathbb{N} et on montre que $U_{n+2} \leq U_{n+1}$:

$U_{n+1} \leq U_{n+2}$ (hypothèse de récurrence) $\Leftrightarrow 0.85U_{n+1} \leq 0.85U_n \Leftrightarrow 0.85U_{n+1} + 6 \leq 0.85U_n + 6 \Leftrightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

On en conclut que la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .



By vvvalentined

cheatography.com/vvvalentined/

Not published yet.

Last updated 5th March, 2023.

Page 1 of 1.

Sponsored by [ApolloPad.com](https://apollopad.com)

Everyone has a novel in them. Finish Yours!

<https://apollopad.com>