

### Raisonnement par récurrence

**1ère étape : Initialisation** On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. ( $n=0$  ou  $n=1$  en général)

**2ème étape : Hérité** On suppose que la propriété est vraie pour un rang  $n$  fixé de  $\mathbb{N}$  et on démontre qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

**3ème étape : Conclusion** On en déduit que la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Vocabulaire et méthodes sur les suites

Étudier la monotonie d'une suite, c'est étudier son sens de variation.

On peut utiliser un raisonnement par récurrence.

On étudie le signe de  $U_{n+1} - U_n$ .

Si  $U_n = f(n)$ , alors on peut étudier le sens de variation de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

### Suites arithmétiques

Si  $(U_n)$  est arithmétique, chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée raison.

Formule de récurrence:  $U_{n+1} = U_n + r$

Formules explicites:  $U_n = U_0 + r \times n$  ou  $U_n = U_1 + r \times (n-1)$  (si  $U_1$  est le premier terme)

Somme des termes consécutifs:  $(\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})) / 2$

### Suites géométriques

Si  $(U_n)$  est géométrique, chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un facteur constant appelé raison

Formule de récurrence:  $U_{n+1} = U_n \times q$

Formules explicites:  $U_n = U_0 \times q^n$  ou  $U_n = U_0 \times q^{n-1}$  (si  $U_1$  est le premier terme)

Somme des termes consécutifs: premier terme  $\times (1 - q^{\text{nombre de termes}}) / (1 - q)$

### Exemple 1

Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_0 = -1$  et  $U_{n+1} = U_n + 2n + 2$ . Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = n^2 + n - 1$

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. Pour  $n=0$ :  $0^2 + 0 - 1 = -1$  et  $U_0 = -1$

On suppose que la propriété est vraie pour un rang  $n$  fixé de  $\mathbb{N}$ :  $U_n = n^2 + n - 1$  et on démontre qu'elle est vraie au rang  $n+1$ :

$$U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1$$

$$\text{On sait que } U_{n+1} = U_n + 2n + 2 = n^2 + n - 1 + 2n + 2 = n^2 + 3n + 1$$

$$\text{On développe : } (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1$$

On en conclut que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = n^2 + n - 1$

### Exemple 2

$(U_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 90$  et  $U_1 = 0.85U_0 + 6$ . Démontrer par récurrence que  $(U_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N}$ .

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. On calcule  $U_1 = 0.85 \times 90 + 6 = 82.5$  donc  $U_1 < U_0$

On suppose que la propriété  $U_{n+1} \leq U_n$  est vraie pour un rang  $n$  fixé de  $\mathbb{N}$  et on montre que  $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ :

$$U_{n+1} \leq U_{n+2} \text{ (hypothèse de récurrence)} \Leftrightarrow 0.85U_{n+1} \leq 0.85U_n \Leftrightarrow 0.85U_{n+1} + 6 \leq 0.85U_n + 6 \Leftrightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

On en conclut que la suite  $(U_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N}$ .



By vvvalentined

[cheatography.com/vvvalentined/](https://cheatography.com/vvvalentined/)

Not published yet.

Last updated 5th March, 2023.

Page 1 of 1.

Sponsored by [ApolloPad.com](https://apollopad.com)

Everyone has a novel in them. Finish Yours!

<https://apollopad.com>