Les suites Cheat Sheet

by vvvalentined via cheatography.com/180334/cs/37524/

Raisonnement par récurrence

1ère étape : Initialisation On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. (n=0 ou n=1 en général)

2ème étape : Hérédité On suppose que la propriété est vraie pour un rang n fixé de ℕ et on démontre qu'elle est vraie au rang n+1.

3ème étape : Conclusion On en déduit que la propriété est vraie pour tout n∈ℕ.

Vocabulaire et méthodes sur les suites

Etudier la monotonie d'une suite, c'est étudier son sens de variation.

On peut utiliser un raisonnement par récurrence.

On étudie le signe de Un+1=Un.

Si Un=f(n), alors on peut étudier le sens de variation de f sur [0,+∞[.

Suites arithmétiques

Si (Un) est arithmétique, chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée raison.

Formule de récurrence: Un+1 = Un+r

Formules explicites: Un = U0+r×n ou Un = U1+r×(n-1) *(si U1 est le premier terme)*

Somme des termes consécutifs: (nombre de termes×(premier+dernier))/2

Suites géométriques

Si (Un) est géométrique, chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un facteur constant appelé raison

Formule de récurrence: Un+1 = Un×q

Formules explicites: Un = U0×q^{n} ou Un = U0×q^{n-1} (si U1 est le premier terme)

Somme des termes consécutifs: premier terme × (1-$q^{\text{nombre de termes}}$)/1-q

Exemple 1

Soit (Un) la suite définie par U0=-1 et Un+1=Un+2n+2. Démontrer par récurrence que, pour tout n∈ℕ, Un=n²+n-1

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. Pour n=0: 0²+0-1=-1 et U0=-1

On suppose que la propriété est vraie pour un rang n fixé de ℕ : Un=n²+n-1 et on démontre qu'elle est vraie au rang n+1 : Un+1=(n+1)²+(n+1)-1

On sait que Un+1= Un+2n-2 = n²+n-1+2n+2 = n²+3n+1

On développe : (n+1)²+(n+1)-1 = n²+2n+1+n+1-1 = n²+3n+1

On en conclut que, pour tout n∈ℕ, Un=n²+n-1

Exemple 2

(Un) est définie sur ℕ par U0=90 et U1=0.85Un+6. Démontrer par récurrence que (Un) est décroissante sur ℕ.

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. On calcule U1 = 0.85×U0+6 = 82.5 donc U1<U0

On suppose que la propriété Un+1 <= Un est vraie pour un rang n fixé de ℕ et on montre que Un+2<=Un+1:

Un+1<=Un+2 (hypothèse de récurrence) ⇔ 0.85Un+1<=0.85Un ⇔ 0.85Un+1+6<=0.85Un+6 ⇔ Un+2<=Un+1

On en conclut que le suite (Un) est décroissante sur ℕ.