Prädikatenlogik Theorie Cheat Sheet

by tiziano123 via cheatography.com/57454/cs/15227/

Logische Äquivalenz

Definition 2.7 [Logische Äquivalenz]

Zwei Formeln φ, ψ ∈ FO(S) heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: J |= φ gdw. J |=ψ. **In Symbolen: φ≡ψ.**

Bem.: Logische Äquivalenzen der AL übertragen sich auf FO. Hinzu treten charakteristische logische Äquivalenzen im Zusammenhang mit Quantoren.

Z.B. die Dualität zwischen ∀ und ∃, die besagt dass für alle φ ∈ FO(S):

∃xφ ≡ ¬∀x¬φ,
∀xφ ≡ ¬∃x¬φ.

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Definition 2.10 Erfüllbarkeitsäquivalenz

Formeln φ,φ′ heißen erfülbarkeitsäquivalent wenn gilt: φ erfüllbar gdw. φ′ erfülbar. Analog wird Erfüllbarkeitsäquivalenz für Formelmengen definiert.

Signaturen

Eine **Signatur S** ist eine Menge von Konstanten-, Funktions- und Relationssymbolen, mit angegebenen Stelligkeiten. Spezialfa ̈lle: S ohne Funktionssymbole : relationale Signatur; S ohne Relationssymbole : funktionale Signatur.

S-Strukturen

Definition 1.1 [S-Strukturen]

Für Signatur S: Eine S-Struktur $A = (A, c^A, ..., f^A, ..., R^A, ...)$ besteht aus ihrer Trägermenge A ≠ ∅ zusammen mit einer Interpretation der Symbole in S, d.h., für jedes Konstantensymbol c ∈ S: ein ausgezeichnetes Element c^A ∈ A. für jedes n-stellige Funktionssymbol f ∈ S: eine n-stellige Funktion $f^A : A^n \rightarrow A$. für jedes n-stellige Relationssymbol R ∈ S: eine n-stellige Relation $R^A \subseteq A^n$.

S-Terme

Definition 1.3 [S-Terme] Die Menge der S-Terme, T(S) (mit Variablenmenge V) ist induktiv erzeugt wie folgt:
- x∈T(S) für jede Variable x ∈ V.
- c ∈ T(S) für jedes Konstantensymbol c ∈ S.
- ist f ∈ S ein n-stelliges Funktionssymbol, und sind $t_1, . . . , t_n$ ∈ T (S), so ist auch $ft_1 ... t_n$ ∈T(S).

$T_n(S) \subseteq T(S)$: die Mengen der Terme, in denen nur Variablensymbole aus $V_n = \{x_1, . . . , x_n\}$ vorkommen.

Speziell steht **$T_0(S)$** für die Menge der Variablen-freien Terme (= ∅ wenn S keine Konstanten hat).

Allgemeingültigkeit

Definition 2.6 [Allgemeingültigkeit]

Eine Formel φ ∈ FO(S) heißt allgemeingültig gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: J |= φ.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.5 [Folgerungsbeziehung]

φ |= ψ bzw. Φ |= ψ.

Für φ,ψ ∈ FO(S):
ψ ist eine logische Folgerung von φ, oder ψ folgt aus φ, in Symbolen φ |= ψ, gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: **J |= φ ⇒ J |= ψ.**

Entsprechend ist Φ |= ψ für Formelmengen Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

FO mit und ohne Gleichheit

Definition 2.11 [FO ohne Gleichheit]

$FO^{\neq}(S) \subseteq FO(S)$ ist aufgebaut wie FO aber ohne Termgleichheiten als atomare Formeln. Die Semantik von FO überträgt sich auf die Teillogik $FO^{\neq}$.

Bemerkung 2.13 Zu jeder Formelmenge Φ ⊆ FO(S) erhält man durch eine systematische Übersetzung in eine explizite Modellierung der Gleichheitsrelation durch eine neues Relationssymbol ~ eine erfülbarkeitsäquivalente Formelmenge $\Phi \sim \subseteq F0^{\neq}(S \cup \{\sim\})$.

Termstruktur

Defintion 1.4 Termstrukturen

Die Menge der S-Terme ist Träger einer S_F-Struktur T = T (S), der Termstruktur (**Herbrand-Struktur**) zu S, mit der folgenden natürlichen Interpretation der Konstanten- und Funktionssymbole in S:

- für Konstantensymbol c ∈ S: $c^T := c \in T(S)$.
- für n-stelliges Funktionssymbol f ∈ S: $f^T: T(S)^n \rightarrow T(S)$ $(t_1,...,t_n) \rightarrow ft_1 ...t_n$.

Wenn S Konstantensymbole hat, ist auch $T_0(S)$ Träger einer entsprechenden Termstruktur $T_0(S)$ (eine Substruktur von T (S)).

Pränexe Normalform

Definition 3.1 [pränexe NF] FO-Formeln in pränexer Normalform sind von der Form $Q_1x_{i1} ...Q_kx_{ik}$ ψ, wo k ∈ N, Q_i ∈ {∀, ∃} und ψ **quantorenfrei.** ψ heißt auch quantorenfreier Kern der Formel, $Q_1x_{i1} . . . Q_k x_{ik}$ ihr Quantorenpräfix.

Man braucht i.d.R. zusätzliche Variablensymbole!

Satz 3.4 Jede FO-Formel ist äquivalent zu einer Formel in pränexer NF.

Beispiel 3.2 S = {E}, E 2-st. Relations-Symbol. Die folgenden Äquivalenzen liefern auf der rechten Seite pränexe Formalisierungen:
∃y(Eyx ∧ ∀x(Eyx → x = y)) ≡ ∃y∀z Exy ∧ (Eyz → z = y) ,
∃y∀xExy ∨ ¬∃yExy ≡ ∃y1∀y2∀y3 Ey2y1 ∨ ¬Exy3 .

Belegungen

Definition 1.5
[Belegungen und Interpretationen]
Eine Funktion β: V → A heißt Belegung (für die x ∈ V) in der S-Struktur A = (A,...). Eine S-Struktur A und Belegung β zusammen bilden eine S-Interpretation J = (A, β).

•Für t = x (**x ∈ V Variable**):
t^J:=β(x).
• Für t = c (**c ∈ S Konstantensymbol**):
t^J:= c^A.
• Für t = $ft_1 \ldots t_n$, mit n-stelligem Funktionssymbol f ∈ S:
t^J := f^A (t_1^J,...,t_n^J).

Schreibweisen für Belegungen und Interpretationen auf Seite 6 FO Skript über Kapitel 2

Freie Variablen

Definition 2.2 [freie Variablen]

Induktive Definition der Menge der freien Variablen, frei(φ) ⊆ V, für φ ∈ FO(S):

Formeln **ohne** freie Variablen heißen **Sätze**.

Freie Variablen (cont)

Schreibweisen: FO_n(S) := {φ ∈ FO(S): frei(φ) ⊆ V_n}. Für φ ∈ FO_n(S) schreiben wir auch φ = φ(x_1, . . . , x_n) um die möglicherweise freien Variablen explizit anzudeuten.

frei(t_1 = t_2) := var(t_1) ∪ var(t_2).
frei($Rt_1 \ldots t_n$) := var(t_1) ∪ . . . ∪ var(t_n).
frei(¬φ) := frei(φ).
frei(φ ∧ ψ) = frei(φ ∨ ψ) := frei(φ) ∪ frei(ψ).
frei(∃xφ) = frei(∀xφ) := frei(φ) \ {x}.

Quantorenrang

Definition 2.3 [Quantorenrang]

Induktive Definition des Quantorenrangs, qr(φ) ∈ N, für φ ∈ FO(S):

Formeln von Quantorenrang 0 heißen **quantorenfrei.**

qr(φ) = 0 für atomares φ.
qr(¬φ) := qr(φ).
qr(φ ∧ ψ) = qr(φ ∨ ψ) := max(qr(φ), qr(ψ)).
qr(∃xφ) = qr(∀xφ) := qr(φ) + 1.

Semantik

Definition 2.4 [Semantik]

Für S-Interpretation J = (A, β) und φ ∈ FO(S): J erfüllt φ gdw. $φ^J$ = 1. **Schreibweise: J|= φ.**

Für Formelmengen Φ ⊆ AL(V) entsprechend: **J|= Φ** gdw. **J |= φ für alle φ ∈ Φ.**

Die Relation |= heißt Modellbeziehung.

Herbrand

Satz 3.10 (Herbrand)

Sei Φ ⊆ $FO_0^{\neq}$ (S) eine Menge von universellen, gleichheitsfreien Sätzen. Dann sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar.

(ii) Φ hat ein Herbrand-Modell ***H* = (T_0(S), $(R^H)_{R\in S}$) |= Φ**, dessen Trägermenge und Funktions- und Konstanteninterpretationen mit der Termstruktur T_0(S) übereinstimmen (H erweitert die S_F-Struktur T_0(S) lediglich um eine geeignete Interpretation der Relationssymbole in S).

Definition 3.8 Eine Formel ist **universell** wenn sie aus atomaren und negiert atomaren Formeln allein mittels **∧, ∨ und ∀-Quantoren** aufgebaut ist.

Lemma 3.12 Sei Φ ⊆ $FO_0^{\neq}$ (S) eine Menge von universell-pränexen Sätzen. Dann sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar. **(ii)** $[[Φ]]^{AL}$ erfüllbar.

Erfülbarkeit

• Φ ⊆ FO_0(S) eine Satzmenge (ohne freie Variablen) ist. Man erhält eine zu einer Formelmenge erfüllbarkeitsäquivalente Satzmenge, indem man neue Konstantensymbole für alle freien Variablen substituiert

• Φ ⊆ $FO_0^{\neq}$ (S) gleichheitsfrei ist. Eine explizite Modellierung der Gleichheitsrelation durch eine zusätzliche Äquivalenzrelation (siehe Bemerkung 2.13) führt zu erfüllbarkeitsäquivalenten Satzmengen ohne Gleichheit.

Erfülbarkeit (cont)

• Φ ⊆ $FO_0^{\neq}$ (S) aus universell-pränexen, gleichheitsfreien Sätzen besteht. Skolemisierung liefert eine erfüllbarkeitsäquivalente Satzmenge in universell-pränexer Form.

• S mindestens ein Konstantensymbol enthält, sodass T_0(S) ≠ ∅ ist, und wir uns ggf. auf Herbrand-Modelle von Φ ⊆ $FO_0^{\neq}$ (S) zurückziehen können.

Φ erfüllbar ⇔ H |= Φ für eine Herbrand-Struktur H = T_0(S), $(R^H)_{R\in S}$.

Kompaktheitssatz (FO)

Satz 4.1 (Kompaktheitssatz) Für jede Formelmenge Φ ⊆ FO sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar. (ii) Jede endliche Teilemenge $Φ_0$ ⊆ Φ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmenge Φ ⊆ FO und Formel ψ ∈ FO sind äquivalent:

(i) Φ |= ψ. **(ii)** Es existiert eine endliche Teilemenge $Φ_0$ ⊆ Φ, sodass $Φ_0$ |= ψ.

Das Korollar folgt aus dem Satz über den Zusammenhang: **Φ|=φ gdw. Φ ∪ {¬φ} unerfüllbar.**