V-Interpretation

Zur Definition der Semantik weisen wir jeder Formel $\varphi \in AL(V)$ zu einer gegebenen V-Interpretation einen Wahrheitswert $\varphi I \in B$ zu. Die Funktion

$J:V \to B$
$p \to J(p)$
J interpretiert p als
"falsch" wenn J(p) = 0 oder
"wahr" wenn J(p)=1,

Allgemeingültigkeit

Definition 2.2 Eine Formel $\varphi \in AL(V)$ heißt allgemeingültig gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$. In Symbolen: $\models \varphi$ (anstelle von $\emptyset \models \varphi$).

z.B. gilt für jedes φ: $\models \varphi \vee \neg\varphi$. Man prüft mittels Wahrheitstafeln nach, dass $\varphi \models \psi$ gdw. $\models \varphi \to \psi$.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.1 $\varphi \models \psi$ bzw. $\Phi \models \psi$. Für $\varphi,\psi \in AL(V)$, bzw. $\Phi \subseteq AL(V)$ und $\psi \in AL(V)$: ψ ist eine logische Folgerung von φ, oder ψ folgt aus φ, in Symbolen $\varphi \models \psi$, gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi \Rightarrow J \models \psi$. Entsprechend ist $\Phi \models \psi$ für Formelmengen Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

Beispiele: Man weist anhand von Wahrheitstafeln nach, dass z.B. für beliebige φ, ψ gilt: $\varphi \wedge \psi \models \varphi \vee \psi$, oder dass $\psi \models (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$.

Quiz AL

Die Formelmenge $\{p, p\to q, \neg q\}$ ist erfüllbar. *Falsch*

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq AL$ gilt $\Phi \models \top$. *Wahr*

Eine Formel $\varphi \in AL$ enthält nur endlich viele aussagenlogische Variablen. *Wahr*

Wenn eine Formel $\varphi \in AL$ erfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ nicht erfüllbar. *Falsch*

Wenn jede Formel einer Formelmenge $\Phi \subseteq AL$ erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar. *Falsch*

(I) φ ist erfüllbar gdw. $\varphi \vdash$ nicht allgemeingültig ist
(II) φ ist allgemeingültig gdw. $\vdash \varphi$ allgemeingültig ist
(III). $\varphi \models \psi$ gdw. $\varphi \vdash \psi$ allgemeingültig ist
(IV). Φ ist unerfullbar gdw. $\Phi \vdash$allgemeingultig ist
(V). Φ ist unerfullbar gdw. $\Phi_0 \vdash$ allgemeingültig ist für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$

Lemma von König

Lemma 4.4 Sei T ein unendlicher, aber endlich verzweigter Baum. Dann gibt es in T einen unendlichen Pfad (von der Wurzel aus).

Bem.: Es ist klar, dass *T* beliebig lange endliche Pfade haben muss; daraus folgt aber keineswegs, dass es einen unendlich langen Pfad gibt

Logische Äquivalenz

Definition 2.3 Zwei Formeln φ, $\psi \in AL(V)$ heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$ gdw. $J \models \psi$. In Symbolen: **$\varphi \equiv \psi$.**

Für φ, $\psi \in AL_n$ gilt demnach: $\varphi \equiv \psi$ gdw. für alle $(b_1,...,b_n) \in B^n$ ist $\varphi[b_1,...,b_n] = \psi[b_1,...,b_n]$.

Logische Äquivalenz lässt sich durch Wahrheitstafeln nachweisen.

Vollständige Systeme von Junktoren

Für n >= 1 lassen sich alle Booleschen Funktionen in B_n durch AL_n-Formeln darstellen, die nur die Aussagenvariablen in V_n und die logischen Junktoren $\wedge$ und $\neg$ benutzen. (Genauso auch mit $\vee$ und $\neg$.)

Ein solches System von Junktoren (oder zugehörigen Booleschen Funktionen) heißt **vollständig.**

Kompaktheitssatz (AL)

Satz 4.1 Sei $V = \{p_i : 1 <= i \in N\}$, AL = AL(V). Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq AL$ sind äquivalent:

(i) Φ ist erfüllbar. **(ii)** Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq AL$ und Formel $\psi \in AL$ sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \psi$. **(ii)** Es gibt eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ derart, dass $\Phi_0 \models \psi$.

Erfüllbarkeit SAT(AL)

Defintion 2.6 $\varphi \in AL(V)$ heißt erfüllbar gdw. eine Interpretation existiert mit $J \models \varphi$. Analog für Formelmengen $\Phi \subseteq AL(V)$: Φ ist erfüllbar gdw. es eine Interpretation J gibt, die Φ erfüllt, d.h. mit $J \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$

Beobachtung 2.7 Erfüllbarkeit ist dual zur Allgemeingültigkeit: φ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ nicht erfüllbar.

Beobachtung 2.8 Die Folgerungsbeziehung lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren: $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.

Funktionale Vollständigkeit

Satz 3.2 Zu jeder Funktion $f \in B_n$ gibt es $\varphi \in AL_n$ mit $f = f_\varphi$.

Man prüft durch Falluntersch-eidung

to do

KNF und DNF

Satz 3.7 Zu jeder Formel $\varphi \in AL_n$ gibt es äquivalente Formeln $\varphi_1 \in AL_n$ in KNF und $\varphi_2 \in AL_n$ in DNF.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!
https://apollopad.com