Aussagenlogik Cheat Sheet

by tiziano123 via cheatography.com/57454/cs/15206/

V-Interpretation

Zur Definition der Semantik weisen wir jeder Formel φ ∈ AL(V) zu einer gegebenen V-Interpretation einen Wahrheitswert φI ∈ B zu. Die Funktion

J:V → B
p → J(p)
J interpretiert p als "falsch" wenn J(p) = 0 oder "wahr" wenn J(p)=1,

Allgemeingültigkeit

Definition 2.2 Eine Formel φ ∈ AL(V) heißt allgemeingültig gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: J |= φ. In Symbolen: |= φ (anstelle von ∅ |= φ).

z.B. gilt für jedes φ: |=φ ∨ ¬φ. Man prüft mittels Wahrheitstafeln nach, dass φ |= ψ gdw. |= φ → ψ.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.1 φ |= ψ bzw. Φ |= ψ. Für φ,ψ ∈ AL(V), bzw. Φ ⊆ AL(V) und ψ ∈ AL(V): ψ ist eine logische Folgerung von φ, oder ψ folgt aus φ, in Symbolen φ |= ψ, gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: J |= φ ⇒ J |= ψ. Entsprechend ist Φ |= ψ für Formelmengen Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

Beispiele: Man weist anhand von Wahrheitstafeln nach, dass z.B. für beliebige φ, ψ gilt: φ ∧ ψ |= φ ∨ ψ, oder dass ψ |= (ψ ∧ φ) ∨ (ψ ∧ ¬φ).

Quiz AL

Die Formelmenge {p,p→q,¬q} ist erfüllbar. *Falsch*

Für jede Formelmenge Φ ⊆ AL gilt Φ|=⊤. *Wahr*

Eine Formel φ ∈ AL enthält nur endlich viele aussagenlogische Variablen. *Wahr*

Wenn eine Formel φ ∈ AL erfüllbar ist, dann ist ¬φ nicht erfüllbar. *Falsch*

Wenn jede Formel einer Formelmenge Φ ⊆ AL erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar. *Falsch*

(I) φ ist erfüllbar gdw. φ ⊢ nicht allgemeingültig ist
(II) φ ist allgemeingültig gdw. ⊢ φ allgemeingültig ist
(III). φ|=ψ gdw. φ⊢ψ allgemeingültig ist
(IV). Φ ist unerfüllbar gdw. Φ ⊢allgemeingültig ist
(V). Φ ist unerfüllbar gdw. Φ_0 ⊢ allgemeingültig ist für ein endliches Φ_0 ⊆ Φ

Lemma von König

Lemma 4.4 Sei T ein unendlicher, aber endlich verzweigter Baum. Dann gibt es in T einen unendlichen Pfad (von der Wurzel aus).

Bem.: Es ist klar, dass *T* beliebig lange endliche Pfade haben muss; daraus folgt aber keineswegs, dass es einen unendlich langen Pfad gibt

Logische Äquivalenz

Definition 2.3 Zwei Formeln φ, ψ ∈ AL(V) heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: J|=φ gdw. J|=ψ. In Symbolen: **φ≡ψ.**

Für φ, ψ ∈ AL_n gilt demnach: φ ≡ ψ gdw. für alle $(b_1,...,b_n) \in B^n$ ist $\varphi[b_1,...,b_n] = \psi[b_1,...,b_n]$.

Logische Äquivalenz lässt sich durch Wahrheitstafeln nachweisen.

Vollständige Systeme von Junktoren

Für n >= 1 lassen sich alle Booleschen Funktionen in B_n durch AL_n-Formeln darstellen, die nur die Aussagenvariablen in V_n und die logischen Junktoren ∧ und ¬ benutzen. (Genauso auch mit ∨ und ¬.)

Ein solches System von Junktoren (oder zugehörigen Booleschen Funktionen) heißt **vollständig.**

Kompaktheitssatz (AL)

Satz 4.1 Sei V = $\{p_i : 1 <= i \in N\}$, AL = AL(V). Für jede Formelmenge Φ ⊆ AL sind äquivalent:

(i) Φ ist erfüllbar. **(ii)** Jede endliche Teilmenge Φ_0 ⊆ Φ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmenge Φ ⊆ AL und Formel ψ ∈ AL sind äquivalent:

(i) Φ |= ψ. **(ii)** Es gibt eine endliche Teilmenge Φ_0 ⊆ Φ derart, dass Φ_0|= ψ.

Erfüllbarkeit SAT(AL)

Defintion 2.6 φ ∈ AL(V) heißt erfüllbar gdw. eine Interpretation existiert mit J |= φ. Analog für Formelmengen Φ ⊆ AL(V): Φ ist erfüllbar gdw. es eine Interpretation J gibt, die Φ erfüllt, d.h. mit J |= φ für alle φ ∈ Φ

Beobachtung 2.7 Erfüllbarkeit ist dual zur Allgemeingültigkeit: φ allgemeingültig gdw. ¬φ nicht erfüllbar.

Beobachtung 2.8 Die Folgerungsbeziehung lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren: Φ |= ψ gdw. Φ ∪ {¬ψ} unerfüllbar ist.

Funktionale Vollständigkeit

Satz 3.2 Zu jeder Funktion f ∈ B_n gibt es φ ∈ AL_n mit f =f_φ.

Man prüft durch Fallunterscheidung

to do

KNF und DNF

Satz 3.7 Zu jeder Formel φ ∈ AL_n gibt es äquivalente Formeln φ_1 ∈AL_n in KNF und φ_2 ∈AL_n in DNF.