

Funktionale Vollständigkeit

Man prüft durch Fallunterscheidung

Satz 3.2 Zu jeder Funktion $f \in B^n$ gibt es $\varphi \in AL_n$ mit $f = f_\varphi$. Damit wissen wir nun auch: $\varphi \rightarrow f_\varphi$ liefert eine bijektive Korrespondenz zwischen den Äquivalenzklassen von AL_n -Formeln bezüglich \equiv und den n -stelligen Booleschen Funktionen.

Vollständige Systeme von Junktoren

Für $n \geq 1$ lassen sich alle Booleschen Funktionen in B^n durch AL_n -Formeln darstellen, die nur die Aussagenvariablen in V_n und die logischen Junktoren \wedge und \neg benutzen. (Genauso auch mit \vee und \neg .) Grund: Man kann \vee oder aber \wedge durch Dualität eliminieren (und $0 \equiv p_1 \wedge \neg p_1$ sowie $1 \equiv p_1 \vee \neg p_1$ benutzen). Ein solches System von Junktoren (oder zugehörigen Booleschen Funktionen) heißt **vollständig**

Quiz AL

Eine Formel $\varphi \in AL$ enthält nur endlich viele aussagenlogische Variablen. *Wahr*

Wenn eine Formel $\varphi \in AL$ erfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ nicht erfüllbar. *Falsch*

Die Formelmengende $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ ist erfüllbar. *Falsch*

Wenn jede Formel einer Formelmengende $\Phi \subseteq AL$ erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar. *Falsch*

Für jede Formelmengende $\Phi \subseteq AL$ gilt $\Phi = T$. *Wahr*

TO DO H2G lösen

Quiz AL (cont)

I. φ ist erfüllbar gdw. $\varphi \vdash$ nicht allgemeingültig ist II. φ ist allgemeingültig gdw. $\vdash \varphi$ allgemeingültig ist III. $\varphi \models \psi$ gdw. $\varphi \vdash \psi$ allgemeingültig ist IV. Φ ist unerfüllbar gdw. $\Phi \vdash$ allgemeingültig ist V. Φ ist unerfüllbar gdw. $\Phi \vdash$ allgemeingültig ist für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$

ZU RESOLUTION AL Sei $K = \{\{p\}\}$ und $C = \{p, q\}$. Dann gilt $K \models C$, allerdings nicht $C \in \text{Res}^*(K) = K$. Stattdessen gilt $K \models$ genau dann, wenn $\in \text{Res}^*(K)$ für alle Klauselmengende K .

ZU RESOLUTION AL Seien $C_1 = \{p, q\}$, $C_2 = \{\neg p, r\}$ Klauseln und $C = \{q, r\}$ eine Resolvente von C_1 und C_2 . Dann gilt $\{C\} \equiv \{C_1, C_2\}$ nicht. Stattdessen gilt $\{C_1, C_2, C\} \equiv \{C_1, C_2\}$ für alle Resolventen C zweier beliebiger Klauseln C_1 und C_2 .

ZU RESOLUTION AL $K = \{\{p, q\}\}$ ist eine erfüllbare Klauselmengende ohne eindeutige minimale erfüllende Belegung, weil sowohl $\{p \rightarrow 1, q \rightarrow 0\} \models K$ als auch $\{p \rightarrow 0, q \rightarrow 1\} \models K$ gilt. Stattdessen besitzt jede erfüllbare Hornklauselmengende eine eindeutige minimale erfüllende Belegung

Logische Äquivalenz

Definition 2.3 Zwei Formeln $\varphi, \psi \in AL(V)$ heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle V -Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$ gdw. $J \models \psi$. In Symbolen: $\varphi \equiv \psi$.

Für $\varphi, \psi \in AL_n$ gilt demnach: $\varphi \equiv \psi$ gdw. für alle $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$ ist $\varphi[b_1, \dots, b_n] = \psi[b_1, \dots, b_n]$.

Logische Äquivalenz (cont)

Logische Äquivalenz lässt sich durch Wahrheitstafeln nachweisen.

Formeln mit derselben Semantik heißen logisch äquivalent

Erfüllbarkeit (AL)

Definition 2.6 $\varphi \in AL(V)$ heißt erfüllbar gdw. eine Interpretation existiert mit $J \models \varphi$. Analog für Formelmengende $\Phi \subseteq AL(V)$: Φ ist erfüllbar gdw. es eine Interpretation J gibt, die Φ erfüllt, d.h. mit $J \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Beobachtung 2.7 Erfüllbarkeit ist dual zur Allgemeingültigkeit: φ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ nicht erfüllbar.

Beobachtung 2.8 Die Folgerungsbeziehung lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren: $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.

Hü und altklausuren hier rein TO DO

KNF und DNF

Satz 3.7 Zu jeder Formel $\varphi \in AL_n$ gibt es äquivalente Formeln $\varphi_1 \in AL_n$ in KNF und $\varphi_2 \in AL_n$ in DNF.

Allgemeingültigkeit

Definition 2.2 Eine Formel $\varphi \in AL(V)$ heißt allgemeingültig gdw. für alle V -Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$. In Symbolen: $\models \varphi$ (anstelle von $\emptyset \models \varphi$).

z.B. gilt für jedes φ : $\models \varphi \vee \neg\varphi$. Man prüft mittels Wahrheitstafeln nach, dass $\varphi \models \psi$ gdw. $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.1 $\varphi \models \psi$ bzw. $\Phi \models \psi$

Für $\varphi, \psi \in AL(V)$, bzw. $\Phi \subseteq AL(V)$ und $\psi \in AL(V)$: ψ ist eine logische Folgerung von φ , oder ψ folgt aus φ , in Symbolen $\varphi \models \psi$, gdw. für alle V -Interpretationen I gilt: $I \models \varphi \Rightarrow I \models \psi$. Entsprechend ist $\Phi \models \psi$ für Formelmengende Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

Beispiele: Man weist anhand von Wahrheitstafeln nach, dass z.B. für beliebige φ, ψ gilt: $\varphi \wedge \psi \models \varphi \vee \psi$, oder dass $\psi \models (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$.

Kompaktheitssatz (AL)

Satz 4.1 Sei $V = \{p_i : 1 \leq i \in \mathbb{N}\}$, $AL = AL(V)$. Für jede Formelmengende $\Phi \subseteq AL$ sind äquivalent:

(i) Φ ist erfüllbar. (ii) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmengende $\Phi \subseteq AL$ und Formel $\psi \in AL$ sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \psi$. (ii) Es gibt eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ derart, dass $\Phi_0 \models \psi$.

Lemma von König

Lemma 4.4 Sei T ein unendlicher, aber endlich verzweigter Baum. Dann gibt es in T einen unendlichen Pfad (von der Wurzel aus).