AL sätze Cheat Sheet

by tiziano123 via cheatography.com/57454/cs/15202/

Funktionale Vollständigkeit

Man prüft durch Fallunterscheidung

Satz 3.2 Zu jeder Funktion f ∈Bn gibt es φ∈ALn mit f =fφ. Damit wissen wir nun auch: φ → fφ liefert eine bijektive Korrespondenz zwischen den Äquivalenzklassen von ALn-Formeln bezüglich ≡ und den n-stelligen Booleschen Funktionen.

Vollständige Systeme von Junktoren

Für n >= 1 lassen sich alle Booleschen Funktionen in Bn durch ALn-Formeln darstellen, die nur die Aussagenvariablen in Vn und die logischen Junktoren ∧ und ¬ benutzen. (Genauso auch mit ∨ und ¬.) Grund: Man kann ∨ oder aber ∧ durch Dualität eliminieren (und 0 ≡ p1 ∧ ¬p1 sowie 1 ≡ p1 ∨ ¬p1 benutzen). Ein solches System von Junktoren (oder zugehörigen Booleschen Funktionen) heißt **vollständig**

Quiz AL

Eine Formel φ ∈ AL enthält nur endlich viele aussagenlogische Variablen. *Wahr*

Wenn eine Formel φ ∈ AL erfüllbar ist, dann ist ¬φ nicht erfüllbar. *Falsch*

Die Formelmenge {p,p→q,¬q} ist erfüllbar. *Falsch*

Wenn jede Formel einer Formelmenge Φ ⊆ AL erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar. *Falsch*

Für jede Formelmenge Φ⊆AL giltΦ|=⊤. *Wahr*

TO DO H2G lösen

Quiz AL (cont)

I. φ ist erfüllbar gdw. φ ⊢ nicht allgemeingültig ist **II.** φ ist allgemeingültig gdw. ⊢ φ allgemeingültig ist **III.** φ|=ψ gdw. φ ⊢ ψ allgemeingültig ist **IV.** Φ ist unerfüllbar gdw. Φ ⊢ allgemeingültig ist **V.** Φ ist unerfüllbar gdw. $Φ_0$⊢ allgemeingültig ist für ein endliches $Φ_0$ ⊆ Φ

ZU RESOLUTION AL Sei K = {{p}} und C = {p,q}. Dann gilt K |= C, allerdings nicht C ∈ Res∗(K) = K. Stattdessen gilt K |= genau dann, wenn ∈ Res∗(K) für alle Klauselmengen K.

ZU RESOLUTION AL Seien C1 = {p,q}, C2 = {¬p,r} Klauseln und C = {q,r} eine Resolvente von C1 und C2. Dann gilt {C} ≡ {C1,C2} nicht. Stattdessen gilt {C1,C2,C} ≡ {C1,C2} für alle Resolventen C zweier beliebiger Klauseln C1 und C2.

ZU RESOLUTION AL K = {{p,q}} ist eine erfüllbare Klauselmenge ohne eindeutige minimale erfüllende Belegung, weil sowohl {p → 1,q → 0} |= K als auch {p → 0,q → 1} |= K gilt. Stattdessen besitzt jede erfüllbare Hornklauselmenge eine eindeutige minimale erfüllende Belegung

Logische Äquivalenz

Definition 2.3 Zwei Formeln φ, ψ ∈ AL(V) heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: J|=φ gdw. J|=ψ. In Symbolen: **φ≡ψ.**

Für φ, ψ ∈ AL_n gilt demnach:φ ≡ ψ gdw. für alle (b_1,...,b_n) ∈ B^n ist φ[b_1,...,b_n] = ψ[b_1,...,b_n].

Logische Äquivalenz (cont)

Logische Äquivalenz lässt sich durch Wahrheitstafeln nachweisen.

Formeln mit derselben Semantik heißen logisch äquivalent

Erfüllbarkeit (AL)

Definition 2.6 φ ∈ AL(V) heißt erfüllbar gdw. eine Interpretation existiert mit J |= φ. Analog für Formelmengen Φ ⊆ AL(V): Φ ist erfüllbar gdw. es eine Interpretation J gibt, die Φ erfüllt, d.h. mit J |= φ für alle φ ∈ Φ.

Beobachtung 2.7 Erfüllbarkeit ist dual zur Allgemeingültigkeit: φ allgemeingültig gdw. ¬φ nicht erfüllbar.

Beobachtung 2.8 Die Folgerungsbeziehung lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren: Φ |= ψ gdw. Φ ∪ {¬ψ} unerfüllbar ist.

Hü und altklausuren hier rein TO DO

KNF und DNF

Satz 3.7 Zu jeder Formel φ ∈ ALn gibt es äquivalente Formeln φ1 ∈ALn in KNF und φ2 ∈ALn in DNF.

Allgemeingültigkeit

Definition 2.2 Eine Formel φ ∈ AL(V) heißt allgemeingültig gdw. für alle V-Interpretationen J gilt: J |= φ. In Symbolen: |= φ (anstelle von ∅ |= φ).

z.B. gilt für jedes φ: |=φ ∨ ¬φ. Man prüft mittels Wahrheitstafeln nach, dass φ |= ψ gdw. |= φ → ψ.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.1 φ |= ψ bzw. Φ |= ψ

Für φ,ψ ∈ AL(V), bzw. Φ ⊆ AL(V) und ψ ∈ AL(V): ψ ist eine logische Folgerung von φ, oder ψ folgt aus φ, in Symbolen φ |= ψ, gdw. für alle V-Interpretationen I gilt: I |= φ ⇒ I |= ψ. Entsprechend ist Φ |= ψ für Formelmengen Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

Beispiele: Man weist anhand von Wahrheitstafeln nach, dass z.B. für beliebige φ, ψ gilt: φ ∧ ψ |= φ ∨ ψ, oder dass ψ |= (ψ ∧ φ) ∨ (ψ ∧ ¬φ).

Kompaktheitssatz (AL)

Satz 4.1 Sei V = {p_i : 1 <= i ∈ N}, AL = AL(V). Für jede Formelmenge Φ ⊆ AL sind äquivalent:

(i) Φ ist erfüllbar. **(ii)** Jede endliche Teilmenge $Φ_0$ ⊆ Φ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmenge Φ ⊆ AL und Formel ψ ∈ AL sind äquivalent:

(i) Φ |= ψ. **(ii)** Es gibt eine endliche Teilmenge Φ0 ⊆ Φ derart, dass Φ0 |= ψ.

Lemma von König

Lemma 4.4 Sei T ein unendlicher, aber endlich verzweigter Baum. Dann gibt es in T einen unendlichen Pfad (von der Wurzel aus).