

Allgemeine Bemerkungen

X steht in der Regel für die Gesamtmenge

\mathcal{L} steht als Ersatz für das häufig verwendete kalligraphische L der Lebesgue- σ -Algebra

Sonderzeichen von [zeichen.tv](https://www.compart.com/de/unicode/U+2112) oder auch <https://www.compart.com/de/unicode/U+2112>

Topologie

Definition Eine Topologie zu einer Menge ist eine Teilmenge der Potenzmenge

Sie enthält die leere Menge und die gesamte Menge

alle Schnitte endlich vieler Teilmengen

jede Vereinigung bel. vieler Teilmengen

Standardbeispiel Menge aller offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n

Hausdorff-Eigenschaft Eine Topologie hat diese Eigenschaft, wenn es zu je zwei Elementen der Ausgangsmenge, zwei disjunkte Mengen der Topologie gibt, die jeweils das Element enthalten

Basis B ist eine Basis, wenn sie jede Menge der Topologie als Vereinigung von Basiselementen erzeugen lässt

Standardbasis Die offenen Teilintervalle bilden eine Basis der Standardtopologie auf den reellen Zahlen

Metrik und Norm

Metrik Verallgemeinerung von Abstand

$d(x,y)$ ist größer gleich 0, nur 0 wenn $x=y$, symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung

Norm weist jedem Element ein Maß in \mathbb{R} zu

Standardmetrik bzw. Standardnorm Euklidische Metrik - Wurzel aus der Summe der Quadrate der Koordinaten

induzierte Topologie Eine Norm induziert eine Metrik und diese wiederum eine Topologie durch die offenen Umgebungen jedes Elements

Metrik und Norm (cont)

die induzierte Topologie hat die Hausdorff-Eigenschaft

σ -Algebra

Definition A Teilmenge der Potenzmenge ist σ -Algebra, wenn sie die gesamte Menge X enthält, zu jeder Menge auch ihr Complement und jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus A

A-messbar / messbarer Raum Die Mengen einer σ -Algebra A nennt man A-messbar und (X,A) heißt messbarer Raum

Produkt- σ -Algebra die kleinste σ -Algebra die alle $A_1 \times A_2$ mit A_1 bzw. A_2 Mengen aus den beiden "Faktor-Algebren" enthält

Borel- σ -Algebra die kleinste σ -Algebra die eine Topologie T enthält

Standard Borel- σ -Algebra in \mathbb{R}^n enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen - das sind jedoch nicht alle Teilmengen - es gibt viele nicht Borel-messbare Mengen in \mathbb{R}^n

Aus der Definition folgt, dass auch der abzählbare Schnitt von Mengen aus A in A enthalten sein muss.

Eine σ -Algebra erlaubt mehr Schnitte als eine Topologie (abzählbar statt endlich) aber weniger Vereinigungen (abzählbar statt beliebig)

Maße

stetige Funktionen auf Topologien S und T, wenn $f^{-1}(T) \in S$ für jede Menge T der Topologie T

die Definition stimmt für metrische Räume mit der klassischen Definition (ϵ - δ) überein

Definition Messbarkeit einer Funktion entspricht der Definition der Stetigkeit nur werden die Topologien durch Messbare Räume (σ -Algebren) ersetzt



Maße (cont)

Definition auf einem messbaren Raum (σ -Algebra) - ordnet jeder (positives) Menge eine nichtnegative Reelle Zahl zu mit $\mu(\emptyset)=0$
 Maß μ und μ ist σ -additiv

σ -additiv für jede paarweise disjunkte Folge von Mengen gilt Der Funktionswert der Vereinigung ist gleich der Summe der Funktionswerte jeder Einzelmeng

Maßraum σ -Algebra mit zugehörigem Maß μ

Wahrscheinlichkeitsmaß wenn $\mu(X)=1$. Maß der Gesamtmenge gleich 1

A ist Nullmenge wenn $\mu(A)=0$

vollständig-änderlicher Maßraum wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist - eine Erweiterung eines Maßraums auf einen vollständigen Maßraum ist möglich

Lebesgue - Integral

Integral einer Treppenfunktion Man definiert das Integral als Summe der Produkte des Funktionswertes mal dem Maß der dem Urbildmenge des Funktionswertes

positive und negative Funktionen $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ entsprechend $f^-(x)$ - dienen zur Vermeidung von $(\infty - \infty)$ - Problemen

Def: einfache Funktion $f(X)$ ist abzählbar

L-Integral für einfache Funktionen f ist L-integrierbar, wenn $\int f^+ < \infty$ und $\int f^- < \infty$. Das Integral wird dann definiert als die Differenz dieser beiden Werte

L-Integral für allg. Funktionen Wenn das Unterintegral gleich dem Oberintegral (Grenzwerte von Integralen einfacher Funktionen). Dann ist dieser Wert das Integral der Funktion

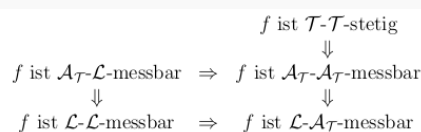
Lebesgue - Integral (cont)

Definition Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $L^1(X)$ - lokal Integrierbar, wenn auf allen kompakten Teilmengen von X

Linearität des Integrals Das Lebesgue-Integral ist linear

Riemann und Lebesgue Wenn (eigentlich) Riemann-Integrierbar, dann auch Lebesgue-Integrierbar mit gleichem Wert (nicht wenn nur uneigentlich Riemann-Integrierbar)

Zusammenhänge stetig und messbar



Sonstige Implikationen gibt es nicht

Maße II

äußeres Maß μ^* ist eine Abbildung, die **jeder** Teilmenge von X eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet. Dabei gilt $\mu(\emptyset)=0$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(B)$, σ -subadditiv

σ -subadditiv der Funktionswert einer Vereinigung von Teilmengen von X ist kleiner gleich der Summe der Funktionswerte jeder Einzelmeng

äußeres Lebesgue-Maß wird induziert über das Volumen einzelner Blöcke

äußere Hausdorff-Maße statt mit Blöcken kann man auch mit Kugeln überdecken - das führt zur Idee auch niederdimensionale Objekte zu messen und dem zu messenden Objekt zu einer reellen Zahl s (Dimension) das Infimum der Summer aller Potenzen r^s der Überdeckung durch Kugeln zuzuweisen

s-dim. Hausdorff-Maß Die Menge wird von möglichst kleinen Kugeln überdeckt und man bildet die Summe der Radien zum Exponenten s



Maße II (cont)

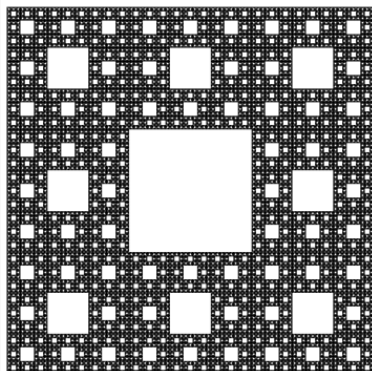
Hausdorff-Dimension: die Dimension bei der das Hausdorff-Maß eine positive Reelle Zahl ist

μ^* -messbar: Eine Teilmenge A von X ist μ^* -messbar wenn gilt $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B)$ für alle Teilmengen B von X

vollständig: Da die Menge aller μ^* -messbaren Mengen eine σ -Algebra bildet, nennt man das äußere Maß eingeschränkt auf diese Mengen ein (induziertes) Maß

- Ein äußeres Maß ist nicht unbedingt ein Maß
- Aus den Maßen einer abzählbaren Überdeckung von X kann ein äußeres Maß konstruiert werden.
- Die eigentliche Definition des Hausdorff-Maßes ist anders aber für nicht pathologische Mengen mit dieser Identisch

Beispiel Sierpinski-Teppich



Der Sierpinski-Teppich hat die Hausdorff-Dimension $\log(8)/\log(3)$

Lebesgue-Maß

Das Lebesgue-Maß ist ein Maß: Auf der Borel- σ -Algebra erfüllt das äußere Lebesgue-Maß (Überdeckung mit Blöcken) die Maßbedingung: $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B)$

Approximierung von außen und innen: Lebesgue-messbare Mengen werden von außen mit offenen Mengen und von innen mit kompakten Mengen approximiert

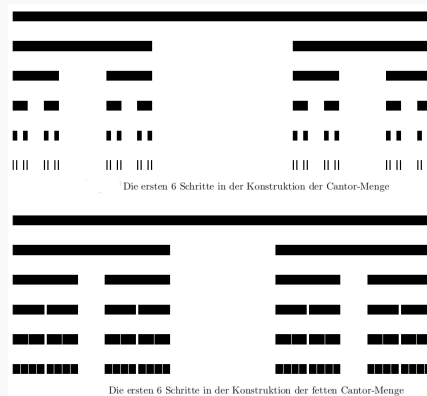
Cantor-Menge (Beispiel)

Lebesgue-Maß (cont)

Lebesgue-messbare Mengen: Alle Teilmengen von \mathbb{R}^n , die man durch abzählbare Mengenoperationen (Vereinigung, Schnitt oder Komplementbildung) von offenen und abgeschlossenen Mengen bekommt, sind Lebesgue-messbar

eine nicht Lebesgue-messbare Menge: Die Menge $R = \{x + Q; x \in \mathbb{R}\}$ ist nicht messbar

Beispiel Cantor-Menge



Cantor-Menge und fette Cantor-Menge (Konstruktionsidee)

Nullmengen und "fast überall"

μ -fast-überall: zwei Funktionen stimmen bis auf eine Nullmenge des Maßes μ überein

das entspricht einer Äquivalenzrelation

$L(X)$ und $\mathcal{L}(X)$: $L(X)$ sind die Menge der Äquivalenzklassen der Lebesgue- und Integrierbaren Funktionen (zwei Funktionen die fast überall übereinstimmen liegen in der selben Äquivalenzklasse)

dadurch erhält man den Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Fkt'en (denn es gibt nun nur die Nullfunktion deren Betragsintegral gleich 0 ist)

