Analysis III Cheat Sheet

by pits via cheatography.com/199821/cs/42268/

Allgemeine Bemerkungen

X steht in der Regel für die Gesamtmenge

ℒ steht als Ersatz für das häufig verwendete kalligraphische L der Lebesgue-σ-Algebra

Sonderzeichen von zeichen.tv oder auch https://www.compart.com/de/unicode/U+2112

Topologie

Definition	Eine Topologie zu einer Menge ist eine Teilmenge der Potenzmenge
	Sie enthält die leere Menge und die gesamte Menge
	alle Schnitte endlich vieler Teilmengen
	jede Vereinigung bel. vieler Teilmengen
Standardbeispiel	Menge aller offenen Teilmengen des R^n
Hausdorff-Eigenschaft	Eine Topologie hat diese Eigenschaft, wenn es zu je zwei Elementen der Ausgangsmenge, zwei disjunkte Mengen der Topologie gibt, die jeweils das Element enthalten
Basis	B ist eine Basis, wenn sie jede Menge der Topologie als Vereinigung von Basiselementen erzeugen lässt
Standardbasis	Die offenen Teilintervalle bilden eine Basis der Standardtopologie auf den reellen Zahlen

Metrik und Norm

Metrik	Verallgemeinerung von Abstand
	d(x,y) ist größer gleich 0, nur 0 wenn x=y, symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung
Norm	weist jedem Element ein Maß in R zu
Standardmetrik bzw. Standardnorm	Euklidische Metrik - Wurzel aus der Summe der Quadrate der Koordinaten
induzierte Topologie	Eine Norm induziert eine Metrik und diese wiederum eine Topologie durch die offenen Umgebungen jedes Elements

Metrik und Norm (cont)

die induzierte Topologie hat die Hausdorff-Eigenschaft

σ-Algebra

Definition	A Teilmenge der Potenzmenge ist σ-Algebra, wenn sie die gesamte Menge X enthält, zu jeder Menge auch ihr Complement und jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus A
A-messbar / messbarer Raum	Die Mengen einer σ-Algebra A nennt man A-messbar und (X,A) heißt messbarer Raum
Produkt-σ-Algebra	die kleinste σ-Algebra die alle A1xA2 mit A1 bzw. A2 Mengen aus den beiden "Faktor-Algebren" enthält
Borel-σ-Algebra	die kleinste σ-Algebra die eine Topologie T enthält
Standard Borel-σ-Algebra in R^n	enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen - das sind jedoch nicht alle Teilmengen - es gibt viele nicht Borel-messbare Mengen in R^n

Aus der Definition folgt, dass auch der abzählbare Schnitt von Mengen aus A in A enthalten sein muss.
Eine σ-Algebra erlaubt mehr Schnitte als eine Topologie (abzählbar statt endlich) aber weniger Vereinigungen (abzählbar statt beliebig)

Maße

stetige Funktionen	auf Topologien S und T, wenn $f^1(T) \in S$ für jede Menge T der Topologie T
	die Definition stimmt für metrische Räume mit der klassischen Definition (ε-δ) überein
Definition Messbarkeit einer Funktion	entspricht der Definition der Stetigkeit nur werden die Topologien durch Messbare Räume (σ-Algebren) ersetzt

Maße (cont)

Definition (positives) Maß μ	auf einem messbaren Raum (σ-Algebra) - ordnet jeder Menge eine nichtnegative Reelle Zahl zu mit $\mu(\emptyset)=0$ und μ ist σ-additiv
σ-additiv	für jede paarweise disjunkte Folge von Mengen gilt Der Funktionswert der Vereinigung ist gleich der Summe der Funktionswerte jeder Einzelmenge
Maßraum	σ-Algebra mit zugehörigem Maß μ
Wahrscheinlichkeitsmaß	wenn $\mu(X)=1$. Maß der Gesamtmenge gleich 1
A ist Nullmenge	wenn $\mu(A)=0$
vollständiger Maßraum	wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist - eine Erweiterung eines Maßraums auf einen vollständigen Maßraum ist möglich

Lebesgue - Integral

Integral einer Treppenfunktion	Man definiert das Integral als Summe der Produkte des Funktionswertes mal dem Maß der dem Urbildmenge des Funktionswertes
positive und negative Funktionen	$f^+(x) = \max(f(x),0)$ entsprechend $f^-(x)$ - dienen zur Vermeidung von $(\infty - \infty)$ - Problemen
Def: einfache Funktion	f(X) ist abzählbar
L-Integral für einfache Funktionen	f ist L-integrierbar, wenn $\int f^+<\infty$ und $\int f^-<\infty$. Das Integral wird dann definiert als die Differenz dieser beiden Werte
L-Integral für allg. Funktionen	Wenn das Unterintegral gleich dem Oberintegral (Grenzwerte von Integralen einfacher Funktionen). Dann ist dieser Wert das Integral der Funktion

Lebesgue - Integral (cont)

Definition	Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $L^1(X)$ - lokal Integrierbar, wenn auf allen kompakten Teilmengen von X
Linearität des Integrals	Das Lebesgue-Integral ist linear
Riemann und Lebesgue	Wenn (eigentlich) Riemann-Integrierbar, dann auch Lebesgue-Integrierbar mit gleichem Wert (nicht wenn nur uneigentlich Riemann-Integrierbar)

Zusammenhänge stetig und messbar

$$\begin{array}{ccc} & & f \text{ ist } \mathcal{T}\text{-}\mathcal{T}\text{-stetig} \\ & & \Downarrow \\ f \text{ ist } \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} & \Rightarrow & f \text{ ist } \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f \text{ ist } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} & \Rightarrow & f \text{ ist } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar} \end{array}$$

Sonstige Implikationen gibt es nicht

Maße II

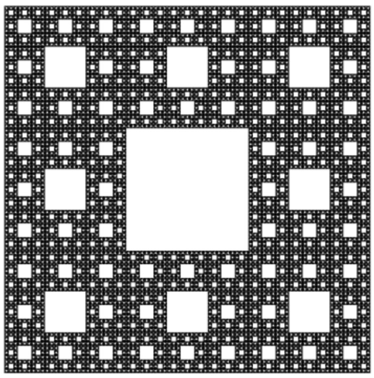
äußeres Maß μ^*	ist eine Abbildung, die **jeder** Teilmenge von X eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet. Dabei gilt $\mu(\emptyset)=0$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(B)$, σ-subadditiv
σ-**sub**additiv	der Funktionswert einer Vereinigung von Teilmengen von X ist kleiner gleich der Summe der Funktionswerte jeder Einzelmenge
äußeres Lebesgue-Maß	wird induziert über das Volumen einzelner Blöcke
äußere Hausdorff-Maße	statt mit Blöcken kann man auch mit Kugeln überdecken - das führt zur Idee auch niederdimensionale Objekte zu messen und dem zu messenden Objekt zu einer reellen Zahl s (Dimension) das Infimum der Summer aller Potenzen r^s der Überdeckung durch Kugeln zuzuweisen
s-dim. Hausdorff-Maß	Die Menge wird von möglichst kleinen Kugeln überdeckt und man bildet die Summe der Radien zum Exponenten s

Maße II (cont)

Hausdorff-Dimension	die Dimension bei der das Hausdorff-Maß eine positive Reelle Zahl ist
μ^*-messbar	Eine Teilmenge A von X ist μ^*-messbar wenn gilt $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^C \cap B) \leq \mu^*(B)$ für alle Teilmengen B von X
vollständiges Maß	Da die Menge aller μ^*-messbaren Mengen eine sigma-Algebra bildet, nennt man das äußere Maß eingeschränkt auf diese Mengen ein (induziertes) Maß

• Ein äußeres Maß ist nicht unbedingt ein Maß
• Aus den Maßen einer abzählbaren Überdeckung von X kann ein äußeres Maß konstruiert werden.
• Die eigentliche Definition des Hasudorff-Maßes ist anders aber für nicht pathologische Mengen mit dieser Identisch

Beispiel Sierpinski-Teppich



Der Sierpinski-Teppich hat die Hausdorff-Dimension log(8)/log(3)

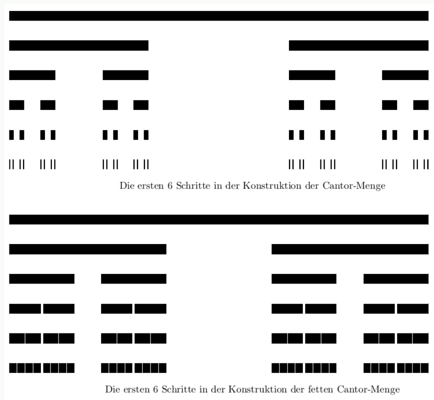
Lebesque-Maß

Das Lebesgue-Maß ist ein Maß	Auf der Borel-sigma-Algebra erfüllt das äußere Lebesgue-Maß (Überdeckung mit Blöcken) die Maßbedingung: $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^C \cap B) \leq \mu^*(B)$
Approximierung von außen und innen	Lebesgue-messbare Mengen werden von außen mit offenen Mengen und von innen mit kompakten Mengen approximiert
Cantor-Menge (Beispiel)	

Lebesque-Maß (cont)

Lebesque-messbare Mengen	Alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die man durch abzählbare Mengenoperationen (Vereinigung, Schnitt oder Komplementbildung) von offenen und ab- geschlossenen Mengen bekommt, sind Lebesgue-messbar
eine nicht Lebesque-messbare Menge	Die Menge R = { x + $\mathbb{Q}$; x ∈ $\mathbb{R}$ } ist nicht messbar

Beispiel Cantor-Menge



Cantor-Menge und fette Cantor-Menge (Konstruktionsidee)

Nullmengen und "fast überall"

μ-fast-überall	zwei Funktionen stimmen bis auf eine Nullmenge des Maßes μ überein
	das entspricht einer Äquivalenzrelation
L(X) und $\mathscr{L}$(X)	L(X) sind die Menge der Äquivalenzklassen der Lebesgue-Integrierbaren Funktionen (zwei Funktionen die fast überall übereinstimmen liegen in der selben Äquivalenzklasse)
	dadurch erhält man den Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Fkt'en (denn es gibt nun nur die Nullfunktion deren Betragsintegral gleich 0 ist)