Mouvements Périodiques

Mouvements périodiques => Mouvements sinusoïdales $x=A\cos(wt+\alpha)$

Forme équation de mouvement : $d^2x/dt^2 + w^2x=0$ avec $w=\sqrt{k/m}$

Superposition

Fréquences égales : $x = A \cos(wt+\varphi)$ avec : $A^2=(A1)^2+(A2)^2+2(A1)(A2)\cos(\varphi2-\varphi1)$ et $\text{tg } \varphi = (A1\sin\varphi1 + A2\sin\varphi2)/(A1\cos\varphi1 + A2\cos\varphi2)$

Battements : $A1\neq A2$ & $f1\neq f2$ mais proches: $f = | (w1-w2)/2\pi | = | f1 - f2 |$

Oscillations libres

Eq diff du mvt : (1) $d^2x/dt^2 + w^2x=0$ #Newton (2) $E=1/2\, m(dx/dt)^2 + 1/2\, kx^2$ #Energie

MHS rectiligne = résultantes de 2 mvts circulaires réels et opposés de même module

Courbe de Lissajous = mvt de 2 oscillations de même amplitude, rectilignes et perpendiculaires

Objets flottants : $md^2y/dt^2 = -\rho gAy$ avec A:aire section droite de l'objet, y: déplacement $\Rightarrow w=\sqrt{\rho gA/m}$

Pendule : $E = 1/2\, m (dx/dt)^2 + (mg/2l)y^2 \Rightarrow w=\sqrt{g/l}$

Tube en U : $E = 1/2\, \rho Al(dy/dt)^2 + g\rho Ay^2 \Rightarrow w^2=2g/l$ avec A: aire, l: long. tot. liquide, y: position surface du liquide % position d'équilibre

MHS amorti

Force de frottements visqueux : $F = -bv$ avec b=coeff de frottement

Eq diff du mvt : $md^2x/dt^2 + bdx/dt +kx=0 \Rightarrow d^2x/dt^2 + b/m\, dx/dt + k/m\, x =0 \Rightarrow wo^2=k/m$; $\gamma=b/m$ => pour tout le système : $w = \sqrt{wo^2 - \gamma^2/4}$

Facteur de qlté : $Q = wo/\gamma$

Amplitude après n cycles : $A(n) = Ao\, e^{-n\gamma/2}$

Rapport des amplitudes après n cycles : $An/Ao = \exp(n\pi/Q)$

Oscillateurs couplés et modes normaux

1) Sys. d'eq. diff.
2) Sol forme $xn=Ane^{jwt}$ `(initialement au repos)` $xn=Ane^{j(wt+\alpha xn)}$ `(initialement en mouvement)`
3)Sys. d'eq.
4)Div par me^{jwt}->Matrice mode normaux
5)$[wo^2,ws^2,w^2][A,B...]=[0...0]$
6)Echelonner ou faire ▲=0 pour trouver w

N.B. Prendre en compte la tension lors des calculs

Ondes transversales

Hypothèses : Fil uniforme de densité linéique ρ, Gravité négligeable, T tension constante dans le fil

Equations d'onde : $\partial^2y/\partial x^2=(1/c^2)(\partial^2y/\partial t^2)$
$\Rightarrow$Sol $y=a \sin(\omega t -\Phi)=a \sin[2\pi/\lambda(ct-x)]$
$2\pi c/\lambda=\omega=2\pi v$ et $\Phi=2\pi x/\lambda$
$c=\lambda v$

Période des oscillations : $\lambda/c=1/v=\tau$ avec λ:long. d'onde

Ondes transversales (cont)

ct-x => depl. vers la droite ct+x => depl. vers la gauche

Expressions équivalentes : $y=a \sin[(2\pi/\lambda)(ct-x)]=a \sin 2\pi(vt-x/\lambda)=a \sin \omega(t-x/c)=a \sin(\omega t-kx)$

Vitesse de phase ou vitesse d'onde :$\partial x/\partial t$

Vitesse d'un oscillateur : $\partial y/\partial t$

Impédance : Z=Force transversale/vitesse transversale $= F/v$ avec $F=-T(\partial y/\partial x)$

$\partial y/\partial t=(-\omega/k)(\partial y/\partial x)=(-\partial x/\partial t)(\partial y/\partial x)=-c\partial y/\partial x$

Déplacement de l'onde : $\mathbf{y}=\mathbf{A}e^{j(\omega t-kx)}$

Impédance : Z=Force transversale/vitesse transversale $= F/v$ avec $F=-T(\partial y/\partial x)=-jkT\mathbf{A}e^{j(\omega t-kx)}$

$\mathbf{A}=Fo/jkT=Fo/j\omega(c/T)$

Oscillations forcées et résonance

Mvt syst. = combinaison des oscillations de fréquences ω0 (fréquence naturelle) et ω (fréquence force)

Intervalle de temps où les 2 types de vibration sont présentes = régime transitoire

Oscillations forcées seules présentes = régime permanent

Amplitude max => $\omega o = \omega$

Oscillateur forcé non amorti : $md^2x/dt^2 + kx = F0\cos\omega t$

Oscillations forcées avec amortissement : $d^2x/dt^2 + \gamma\, dx/dt + \omega o^2 x = Fo/m \cos\omega t$

Oscillations forcées et résonance (cont)

1. Trouver eq de forme : $md^2x/dt^2 + kx = F0\cos \omega t$
2. Solution : $z=A\, e^{j(\omega t+\alpha)}$ `(non amorti)` $z =Ae^{j(\omega t-\alpha)}$ `(amorti)`
3. Regrouper termes semblables
4. Décomposer $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
5. Système d'eq par identification
6. Résoudre pour A `(élever au carré,addition) et tg=sin/cos`

Fréquence max : $\omega m = \omega o(1-1/(2Q^2))^{1/2}$

Amplitude max : $Am = Ao\, Q/(1-1/(4Q^2))^{1/2}$

$P = dW/dt = F\, dx/dt = Fv$ avec $F = F0 \cos \omega t$ et $x= (Fo/m)\cos(\omega t) / (\omega o^2-\omega^2) = C \cos \omega t$ (non amorti) ou $x=A \cos(\omega t - \delta)$ (amorti)

Vitesse max => $\omega = \omega 0$ = résonnance de vitesse.

Puissance moyenne : $P(\omega) = (Fo^2\omega o/2kQ)*[1/((\omega o/\omega - \omega/\omega o)^2+1/Q^2)]$

Puissance maximale : $\omega=\omega o \Rightarrow Pm = Fo^2\omega oQ/2k$ ou $QFo^2/2m\omega o$

$\gamma=2$▲$\omega=\omega o/Q$

$E=Eoe^{-\gamma t}$

Equation de d'Alembert-Lagrange

Equation de Lagrange : $d/dt(\partial L/\partial q'j) - \partial L/\partial qj + \partial R/\partial q'j = Qj$ (horizontal : qj=xj, vertical: qj=yj)

$L = T -V$ avec $T = \sum 1/2\, m\alpha(v\alpha)^2$ et $V=\sum(Fi)(ri)$

Equation de d'Alembert-Lagrange (cont)

Trouver l'équ. diff. du mvt à partir de l'éq. de Lagrange
1. Chercher T et V pour trouver L.
2. R = 0 (pas de frottement proportionnel à la vitesse) et Qj = 0 (pas de forces non conservatives)
3. Plug in it epi lapè.

Trouver les modes normaux : Après avoir trouvé le syst. d'éq. diff., on met sous forme matricielle $\mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et on résoud en prenant des solutions de la forme $\mathbf{x}(t)$= [X1e^{st} X2e^{st}] On doit résoudre $\det((\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ pour trouver les valeurs propres λ. Ce qui donne des solutions de la forme $\mathbf{x} = \phi r e^{\pm j\omega r t}$ avec $\omega r = (\lambda r)^{1/2}$ et ϕr=[a b] lorsqu'on resoud ($(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) - \lambda\mathbf{I}$)[a b]=[0 0]

Formulaire de Trigonométrie

cos(x + 2π) = cos x	sin(x + 2π) = sin x
cos(x + π) = − cos x	sin(x + π) = − sin x
cos(π/2 - x) = sin x	sin(π/2 - x) = cos x
cos(π/2 + x) = - sin x	sin(π/2 + x) = cos x
cos(a + b) = cos a cos b − sin a sin b	sin(a + b) = sin a cos b + sin b cos a
cos(a − b) = cos a cos b + sin a sin b	sin(a − b) = sin a cos b − sin b cos a

Formulaire de Trigonométrie (cont)

cos(2a) = $\cos^2$ a − $\sin^2$ a	sin(2a) = 2 sin a cos a
cos a cos b = 1/2 (cos(a − b) + cos(a + b))	sin a sin b = 1/2 (cos(a + b) - cos(a - b))
sin a cos b =1/2 (sin(a + b) + sin(a − b))	
$\cos^2$ a =1/2 (1 + cos(2a))	$\sin^2$ a =1/2 (1 − cos(2a))
cos p + cos q = 2 cos((p+q)/2)cos((p-q)/2)	sin p + sin q = 2 sin((p+q)/2)cos((p-q)/2)
cos p - cos q = - 2 cos((p+q)/2)cos((p-q)/2)	sin p - sin q = -2 cos((p+q)/2)sin((p-q)/2)
1 + cos x = 2 $\cos^2$x/2	1 − cos x = 2 $\sin^2$x/2
cos x = cos a ⇔ x = a + 2kπ ou x = -a + 2kπ	sin x = sin a ⇔ x = a + 2kπ ou x = π − a + 2kπ
$e^{ix} + e^{-ix}$ = 2 cos x	$e^{ix} - e^{-ix}$ = 2i sin x