

Mouvements Périodiques

Mouvements périodiques =>
Mouvements sinusoïdales
 $x = A \cos(\omega t + \alpha)$
Forme équation de mouvement :
 $d^2x/dt^2 + w^2x = 0$ avec $w = \sqrt{k/m}$

Superposition

Fréquences égales : $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec : $A^2 = (A1)^2 + (A2)^2 + 2(A1)(A2)\cos(\varphi2 - \varphi1)$ et $\tan \varphi = (A1 \sin \varphi1 + A2 \sin \varphi2) / (A1 \cos \varphi1 + A2 \cos \varphi2)$
Battements : $A1 \neq A2$ & $f1 \neq f2$ mais proches: $f = |(w1 - w2)/2\pi| = |f1 - f2|$

Oscillations libres

Eq diff du mvt : (1) $d^2x/dt^2 + w^2x = 0$ #Newton (2) $E = 1/2 m(dx/dt)^2 + 1/2 kx^2$ #Energie
MHS rectiligne = résultantes de 2 mvts circulaires réels et opposés de même module
Courbe de Lissajous = mvt de 2 oscillations de même amplitude, rectilignes et perpendiculaires
Objets flottants : $m d^2y/dt^2 = -\rho g A y$ avec A: aire section droite de l'objet, y: déplacement => $w = \sqrt{\rho g A / m}$
Pendule : $E = 1/2 m(dx/dt)^2 + (mg/2l)y^2 => w = \sqrt{g/l}$
Tube en U : $E = 1/2 \rho A l (dy/dt)^2 + \rho g A y^2 => w^2 = 2g/l$ avec A: aire, l: long. tot. liquide, y: position surface du liquide % position d'équilibre

MHS amorti

Force de frottements visqueux :
 $F = -bv$ avec b=coeff de frottement
Eq diff du mvt : $m d^2x/dt^2 + b dx/dt + kx = 0 => d^2x/dt^2 + b/m dx/dt + k/m x = 0 => w_0^2 = k/m ; \gamma = b/m =>$ pour tout le système : $w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2/4}$

Facteur de qlté : $Q = w_0/\gamma$

Amplitude après n cycles : $A(n) = A_0 e^{-n\gamma/2}$

Rapport des amplitudes après n cycles : $A(n)/A_0 = \exp(-n\pi/Q)$

Oscillateurs couplés et modes normaux

- 1) Sys. d'eq. diff.
- 2) Sol forme $x_n = A_n e^{j\omega t}$ (initialement au repos)
 $x_n = A_n e^{j(\omega t + \alpha_n)}$ (initialement en mouvement)
- 3) Sys. d'eq.
- 4) Div par $m e^{j\omega t}$ -> Matrice mode normaux
- 5) $[w_0^2, w_s^2, w^2][A, B, \dots] = [0 \dots 0]$
- 6) Echelonner ou faire $\Delta = 0$ pour trouver w

N.B. Prendre en compte la tension lors des calculs

Ondes transversales

Hypothèses : Fil uniforme de densité linéique ρ , Gravité négligeable, T tension constante dans le fil

Equations d'onde : $\partial^2 y / \partial x^2 = (1/c^2) (\partial^2 y / \partial t^2)$
=> Sol $y = a \sin(\omega t - \Phi) = a \sin[2\pi/\lambda(ct - x)]$
 $2\pi c/\lambda = \omega = 2\pi v$ et $\Phi = 2\pi x/\lambda$
 $c = \lambda v$

Période des oscillations : $\lambda/c = 1/v = \tau$ avec λ : long. d'onde

Ondes transversales (cont)

ct-x => depl. vers la droite ct+x => depl. vers la gauche

Expressions équivalentes : $y = a \sin[(2\pi/\lambda)(ct - x)] = a \sin 2\pi(vt - x/\lambda) = a \sin \omega(t - x/c) = a \sin(\omega t - kx)$

Vitesse de phase ou vitesse d'onde : $\partial x / \partial t$

Vitesse d'un oscillateur : $\partial y / \partial t$

Impédance : $Z = \text{Force transversale} / \text{vitesse transversale} = F/v$ avec $F = -T(\partial y / \partial x)$

$\partial y / \partial t = (-w/k)(\partial y / \partial x) = (-\partial x / \partial t)(\partial y / \partial x) = -c \partial y / \partial x$

Déplacement de l'onde :

$y = A e^{j(\omega t - kx)}$

Impédance : $Z = \text{Force transversale} / \text{vitesse transversale} = F/v$ avec $F = -T(\partial y / \partial x) = -jkT A e^{j(\omega t - kx)}$

$A = F_0 / jkT = F_0 / j\omega(c/T)$

Oscillations forcées et résonance

Mvt syst. = combinaison des oscillations de fréquences ω_0 (fréquence naturelle) et ω (fréquence force)

Intervalle de temps où les 2 types de vibration sont présentes = régime transitoire

Oscillations forcées seules présentes = régime permanent

Amplitude max => $\omega = \omega_0$

Oscillateur forcé non amorti : $m d^2x/dt^2 + kx = F_0 \cos \omega t$

Oscillations forcées avec amortissement : $d^2x/dt^2 + \gamma dx/dt + \omega_0^2 x = F_0/m \cos \omega t$

Oscillations forcées et résonance (cont)

1. Trouver eq de forme : $m d^2x/dt^2 + kx = F_0 \cos \omega t$
2. Solution : $z = A e^{j(\omega t + \alpha)}$ (non amorti) $z = A e^{j(\omega t - \alpha)}$ (amorti)
3. Regrouper termes semblables
4. Décomposer $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
5. Système d'eq par identification
6. Résoudre pour A (élever au carré, addition) et $\tan \alpha = \sin / \cos$

Fréquence max : $\omega_m = \omega_0 (1 - 1/(2Q^2))^{1/2}$

Amplitude max : $A_m = A_0 Q / (1 - 1/(4Q^2))^{1/2}$

$P = dW/dt = F dx/dt = Fv$ avec $F = F_0 \cos \omega t$ et $x = (F_0/m) \cos(\omega t) / (\omega_0^2 - \omega^2) = C \cos \omega t$ (non amorti) ou $x = A \cos(\omega t - \delta)$ (amorti)

Vitesse max => $\omega = \omega_0$ = résonance de vitesse.

Puissance moyenne : $P(\omega) = (F_0^2 \omega_0 / 2kQ) * [1 / ((\omega_0/\omega - \omega/\omega_0)^2 + 1/Q^2)]$

Puissance maximale : $\omega = \omega_0 => P_m = F_0^2 \omega_0 Q / 2k$ ou $Q F_0^2 / 2m \omega_0$

$\gamma = 2 \Delta \omega = \omega_0 / Q$

$E = E_0 e^{-\gamma t}$

Equation de d'Alembert-L- agrange

Equation de Lagrange : $d/dt(\partial L / \partial \dot{q}^j) - \partial L / \partial q^j + \partial R / \partial q^j = Q_j$ (horizontal : $q_j = x_j$, vertical : $q_j = y_j$)
 $L = T - V$ avec $T = \sum 1/2 m \alpha (v \alpha)^2$ et $V = \sum (F_i)(r_i)$

Equation de d'Alembert-Lagrange (cont)

Trouver l'équ. diff. du mvt à partir de l'éq. de Lagrange

1. Chercher T et V pour trouver L.
2. $R = 0$ (pas de frottement proportionnel à la vitesse) et $Q_j = 0$ (pas de forces non conservatives)
3. Plug in it epi lapè.

Trouver les modes normaux : Après avoir trouvé le syst. d'éq. diff., on met sous forme matricielle $M\ddot{x} + Kx = 0$ et on résoud en prenant des solutions de la forme $x(t) = [X_1 e^{st} X_2 e^{st}]$ On doit résoudre $\det((M^{-1}K) - \lambda I) = 0$ pour trouver les valeurs propres λ . Ce qui donne des solutions de la forme $x = re^{\pm j\omega t}$ avec $\omega = (\lambda r)^{1/2}$ et $\phi = [a \ b]$ lorsqu'on résoud $((M^{-1}K) - \lambda I)[a \ b] = [0 \ 0]$

Formulaire de Trigonométrie

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x \quad \sin(\pi/2 + x) = \cos x$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Formulaire de Trigonométrie (cont)

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \quad \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 x/2 \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2$$

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

