# Аннуитет, особые случаи Cheat Sheet

by Blodwyn (Blodwyn) via cheatography.com/198206/cs/44083/

## Общее про аннуитет

Смотри в этой шпаргалке

## Платежи и начисления %

S - наращенная стоимость

P - дисконтированная стоимость

R - аннуитетный платеж

i - процентная ставка

n - срок ренты (лет)

p - количество аннуитетных платежей в году

m - количество начислений % в году

## Аннуитет постнумерандо

## p=1; m>1

$$S_{post} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

$$P_{post} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n\cdot m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

## p>1; m=1

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

## p>1;m>1;m=p

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} - 1}{\frac{i}{m}}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n\cdot m}}{\frac{i}{m}}$$

В знаменателе должно стоять выражение $(1+i/m)^{m/p}$-1, но, т.к. m=p, то скобка будет в степени 1, значит 1+i/m--1=i/m

## p>1;m>1;m≠p

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n\cdot m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

## Аннуитет пренумерандо

## p=1; m>1

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}$$

$S_{post}$ и $P_{post}$ также вычисляем по формулам для p=1; m>1

## p>1;m=1

$$S_{pre} = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$S_{post}$ и $P_{post}$ также вычисляются по формулам для p>1; m = 1

## p>1; m>1; m=p

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)$$

m=p, поэтому скобка $(1+i/m)^{m/p}$ превращается в $(1+i/m)^{1}$

## p>1; m>1; m≠p

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

C
By Blodwyn (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.

### Выплаты в середине периода

Аннуитет постнумерандо **"сдвигаем" на 1/2 периода назад**, домножая аннуитет постнумерандо на доп. множитель

### p=1; m=1

$$S' = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

### p=1; m>1

$$S' = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$

### p>1; m=1

$$S' = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2p}}$$

### p>1; m>1

$$S' = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}$$

### !

Для вычисления дисконтированной стоимости аналогично умножаем $P_{post}$ на соответствующую скобку в зависимости от условий p и m

## Непрерывное начисление %

## Аннуитет постнумерандо

$$S_{post} = R \cdot \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^{i} - 1}$$

$$P_{post} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^{i}}\right)^{n}}{e^{i} - 1}$$

## Аннуитет пренумерандо

$$S_{pre} = S_{post} \cdot e^{i}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot e^{i}$$

## p-срочная рента

$$S_{post} = \frac{R}{P} \cdot \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^{\frac{i}{P}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{P} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^{i}}\right)^{n}}{e^{\frac{i}{P}} - 1}$$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot e^{\frac{i}{P}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot e^{\frac{i}{P}}$$

### Период платежей более года

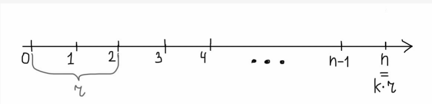
Члены ренты выплачиваются с интервалами r>1 года
**r - период ренты**, платежи осуществляются **1 раз в несколько лет**
Это похоже на p, когда платежи осуществляются несколько раз за 1 год

### Сравнение r и p

| | | |
|---|---|---|
| продолжительность периода ренты | r лет | 1/p лет |
| | | 365/p дней |
| кол-во периодов ренты | n/r | n*p |
| кол-во платежей за год | 1/r | p |

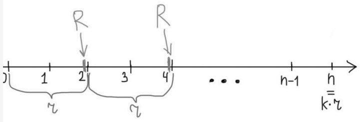
1/r платежей за год -> платеж осуществляется 1 раз в несколько лет, значит, за один год осуществляется всего 1/r часть платежа

### Наглядно




Для удобства примем, что n кратно r. Т.е. n-ый год - это конец срока ренты и одновременно последний год, входящий в последний период r. В момент конца n-ого года заканчивается и последний период r.

### Аннуитет постнумерандо

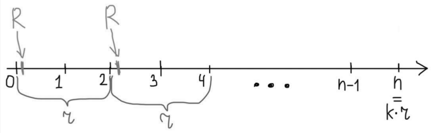



$$S_{post} = R\cdot r\cdot(1+i)^{n-r} + R\cdot r\cdot(1+i)^{n-2r} + \ldots + R\cdot r\cdot(1+i)^{r} + R\cdot r =$$
$$= R\cdot r\cdot\frac{\left(\left((1+i)^{r}\right)^{\frac{n}{r}} - 1\right)}{(1+i)^{r} - 1} = \mathbf{R\cdot r\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{r}-1}}$$

$$P_{post} = \frac{R\cdot r}{(1+i)^{r}} + \frac{R\cdot r}{(1+i)^{2r}} + \ldots + \frac{R\cdot r}{(1+i)^{n-r}} + \frac{R\cdot r}{(1+i)^{n}} =$$
$$= \frac{R\cdot r}{(1+i)^{r}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{(1+i)^{r}}\right)^{\frac{n}{r}} - 1}{\frac{1}{(1+i)^{r}} - 1} = R\cdot r\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n} - 1}{\frac{(1+i)^{r}}{(1+i)^{r}} - (1+i)^{r}} =$$
$$= \mathbf{R\cdot r\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}}{(1+i)^{r}-1}}$$

R*r -> поскольку R - это **годовой платеж**, а период ренты r - несколько лет
Если по условию задачи R - платеж за период r, то R умножать на r не нужно

### Аннуитет пренумерандо

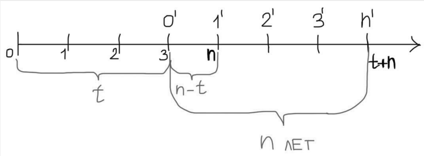



$$S_{pre} = S_{post}\cdot(1+i)^{r}$$

$$P_{pre} = P_{post}\cdot(1+i)^{r}$$

$S_{post}$ и $P_{post}$ также рассчитываются по соответствующим формулам ренты с периодом ренты r

## Отложенная рента




Рента, которая начинает выплачиваться через t лет после некоторого начального периода времени

## Важно

Такой сдвиг во времени:

★**не влияет** на величину **наращенной** суммы -> от сдвига начала ренты сам период, в течение которого наращиваются %, не изменится, а просто сдвинется вперёд

★**влияет** на величину **дисконтированной** суммы -> сдвиг начала ренты приведет к увеличению периода, за который дисконтируется рента, на величину t (время отсрочки ренты) -> теперь мы дисконтируем ренту за n+t лет (а не n лет).

## Формула

$$P_t = \frac{P}{(1+i)^t}$$

Подходит и для аннуитета постнумерандо, и для аннуитета пренумерандо

## Начисление простых %

**Особенность ренты:** % за период начисляются лишь на основной (инвестированный) капитал, т.е. **% не реинвестируются**.
Формулы выводятся на основе **арифметической прогрессии**.

## Арифметическая прогрессия

Это последовательность, в которой каждый последующий член можно найти, если к предыдущему члену прибавить одно и то же число

## Параметры прогрессии

**$a_1$** - первый член арифметической прогрессии
**$a_n$** - n-ый член арифметической прогрессии
**d** - число, которое последовательно прибавляется к каждому последующему члену прогрессии

## n-ый член прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

К $a_1$ еще не прибавляется d
d прибавляется к **каждому из оставшихся** (n-1) членов прогрессии

## Сумма прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + \overbrace{a_1 + d \cdot (n-1)}^{a_n}}{2} \cdot n$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

## Наращенная сумма

$$S_{post} = R \cdot (1 + i \cdot (n-1)) + R \cdot (1 + i \cdot (n-2)) + \ldots$$
$$\ldots + \underbrace{R \cdot (1+i)}_{d} + \underbrace{R}_{a_1}$$

$$a_1 = R; d = R \cdot i; a_n = R + R \cdot i \cdot (n-1)$$

$$S_{post} = \frac{R + R + R \cdot i \cdot (n-1)}{2} \cdot n =$$
$$= R \cdot n \cdot \left[1 + \frac{i \cdot (n-1)}{2}\right]$$

Аннуитет постнумерандо

## Дисконтированная сумма

$$P_{post} = \frac{R}{(1 + i \cdot n)} + \frac{R}{(1 + i \cdot (n-1))} + \ldots + \frac{R}{1+i} =$$
$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{R}{(1 + i \cdot t)}$$

Аннуитет постнумерандо

## Банк. дисконтирование

$$P_{post\ \text{БАНК.}} = R \cdot (1 - d \cdot n) + R \cdot (1 - d \cdot (n-1)) + \ldots + R \cdot (1 - d) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n} R \cdot (1 - d \cdot t)$$

$$a_1 = R - R \cdot d \ ; a_n = R - R \cdot d - R \cdot d \cdot (n-1)$$

$$P_{post} = \frac{R - R \cdot d + R - R \cdot d - R \cdot d \cdot (n-1)}{2} \cdot n =$$
$$= \frac{2R - 2R \cdot d - n \cdot R \cdot d + R \cdot d}{2} \cdot n =$$
$$= \frac{2R - R \cdot d(1+n)}{2} \cdot n =$$
$$= R \cdot n \cdot \left[1 - \frac{d \cdot (1+n)}{2}\right]$$

Банковское дисконтирование - должнику в начале срока выдается сумма, уменьшенная на сумму процентов (т.е. сумма с дисконтом (скидкой) d), а возврату в конце срока подлежит полная сумма.

## Переменная рента

Рента, при которой размеры членов ренты изменяются во времени

## Случай 1

Абсолютное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют арифметическую прогрессию:
R; R+a; R+2a;...; R+a*(n-1)
Каждый последующий член ренты увеличивается на одно и то же число a

## p=1; m=1

$$S_{post}=\left(R+\frac{a}{i}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{na}{i}$$

$$P_{post}=\left(R+\frac{a}{i}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}-\frac{na\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$$

## p>1; m=1

$$S_{post}=\sum_{t=1}^{n\cdot p}\frac{R+a\cdot(t-1)}{p}\cdot(1+i)^{n-\frac{t}{p}}$$

$$P_{post}=\sum_{t=1}^{n\cdot p}\frac{R+a\cdot(t-1)}{p}\cdot(1+i)^{-\frac{t}{p}}$$

Члены ренты: R/p; (R+a)/p; (R+2a)/p; ...; (R+(n*p-1*)a)/p.

## Случай 2

Относительное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют геометрическую прогрессию:
R; R*q; R*q$^2$; ...; R*q$^{n-1}$
Каждый последующий член ренты больше предыдущего в q раз

## p=1; m=1

$$S_{post}=R\cdot\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}$$

$$P_{post}=R\cdot\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n-1}{q-(1+i)}$$

## p>1; m=1

$$S_{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{q^{n\cdot p}-(1+i)^n}{q-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

$$P_{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\frac{q^{n\cdot p}}{(1+i)^n}-1}{q-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

Члены ренты: R/p; (R/p)*q; (R/p)*q$^2$; ...; (R/p)*q$^{n}$*p-1

## Случай 3

Разовые изменения платежей в потоке

## Принцип вычисления

Наращенная и дисконтированная стоимость определяется **путем прямого счета**

## Вечная рента

Платежи по ренте осуществляются в течение **неограниченного срока** (бесконечно)

**Пример**: вы хотите положить на вклад в банк такую сумму, чтобы при фиксированной годовой % ставке регулярно получать R руб./год в течение неограниченного срока в будущем.
Чтобы узнать, сколько первоначально положить в банк на вклад, используем формулу вечной ренты.

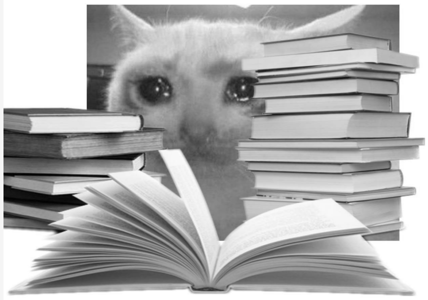
## Будущая стоимость ренты

**Нет смысла вычислять**, т.к. платежи по ренте осуществляются в течение неограниченного срока

## Настоящая стоимость

$$P = \frac{R}{i}$$

## Поздравляю!



Ты дошел(-ла) до конца. Ты смелый котик.