Аннуитет, особые случаи Cheat Sheet

by Blodwyn (Blodwyn) via cheatography.com/198206/cs/44083/

Общее про аннуитет

Смотри в этой шпаргалке

Платежи и начисления %

S - наращенная стоимость

P - дисконтированная стоимость

R - аннуитетный платеж

i - процентная ставка

n - срок ренты (лет)

p - количество аннуитетных платежей в году

m - количество начислений % в году

Аннуитет постнумерандо

p=1; m>1

$$S_{post} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

$$P_{post} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

p>1; m=1

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

p>1;m>1;m=p

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\frac{i}{m}}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\frac{i}{m}}$$

В знаменателе должно стоять выражение $(1+i/m)^{m/p}$-1, но, т.к. m=p, то скобка будет в степени 1, значит 1+i/m--1=i/m

p>1;m>1;m≠p

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Аннуитет, особые случаи Cheat Sheet

by Blodwyn (Blodwyn) via cheatography.com/198206/cs/44083/

Аннуитет пренумерандо

p=1; m>1

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^m$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^m$$

S_{post} и P_{post} также вычисляем по формулам для p=1; m>1

p>1;m=1

$$S_{pre} = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{p}}$$

S_{post} и P_{post} также вычисляются по формулам для p>1; m = 1

p>1; m>1; m=p

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)$$

m=p, поэтому скобка $(1+i/m)^{m/p}$ превращается в $(1+i/m)^1$

p>1; m>1; m≠p

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

Аннуитет, особые случаи Cheat Sheet

by Blodwyn (Blodwyn) via cheatography.com/198206/cs/44083/

Выплаты в середине периода

Аннуитет постнумерандо **"сдвигаем" на 1/2 периода назад**, домножая аннуитет постнумерандо на доп. множитель

p=1; m=1

$$S' = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

p=1; m>1

$$S' = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$

p>1; m=1

$$S' = S_{post} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2p}}$$

p>1; m>1

$$S' = S_{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}$$

!

Для вычисления дисконтированной стоимости аналогично умножаем P_{post} на соответствующую скобку в зависимости от условий p и m

Непрерывное начисление %

Аннуитет постнумерандо

$$S_{post} = R \cdot \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^{i} - 1}$$

$$P_{post} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^{i}}\right)^{n}}{e^{i} - 1}$$

Аннуитет пренумерандо

$$S_{pre} = S_{post} \cdot e^{i}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot e^{i}$$

p-срочная рента

$$S_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^{\frac{i}{p}} - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^{i}}\right)^{n}}{e^{\frac{i}{p}} - 1}$$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot e^{\frac{i}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot e^{\frac{i}{p}}$$

Период платежей более года

Члены ренты выплачиваются с интервалами r>1 года

r - период ренты, платежи осуществляются **1 раз в несколько лет**

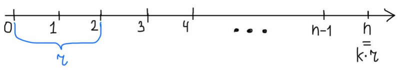
Это похоже на p, когда платежи осуществляются несколько раз за 1 год

Сравнение r и p

продолжительность периода ренты	r лет	1/p лет
		365/p дней
кол-во периодов ренты	n/r	n*p
кол-во платежей за год	1/r	p

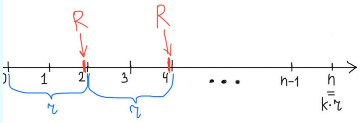
1/r платежей за год -> платеж осуществляется 1 раз в несколько лет, значит, за один год осуществляется всего 1/r часть платежа

Наглядно



Для удобства примем, что n кратно r. Т.е. n-ый год - это конец срока ренты и одновременно последний год, входящий в последний период r. В момент конца n-ого года заканчивается и последний период r.

Аннуитет постнумерандо



$$S_{post} = R\cdot r\cdot(1+i)^{n-r} + R\cdot r\cdot(1+i)^{n-2r} + \ldots + R\cdot r\cdot(1+i)^{r} + R\cdot r =$$

$$= R\cdot r\cdot\frac{\left((1+i)^r\right)^{\frac{n}{r}} - 1}{(1+i)^r - 1} = R\cdot r\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}$$

$$P_{post} = \frac{R\cdot r}{(1+i)^r} + \frac{R\cdot r}{(1+i)^{2r}} + \ldots + \frac{R\cdot r}{(1+i)^{n-r}} + \frac{R\cdot r}{(1+i)^n} =$$

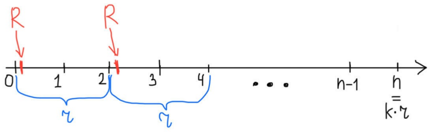
$$= \frac{R\cdot r}{(1+i)^r}\cdot\frac{\left(\frac{1}{(1+i)^r}\right)^{\frac{n}{r}} - 1}{\frac{1}{(1+i)^r} - 1} = R\cdot r\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{\cancel{(1+i)^r}}{\cancel{(1+i)^r}} - (1+i)^r} =$$

$$= R\cdot r\cdot\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{(1+i)^r - 1}$$

R*r -> поскольку R - это **годовой платеж**, а период ренты r - несколько лет

Если по условию задачи R - платеж за период r, то R умножать на r не нужно

Аннуитет пренумерандо

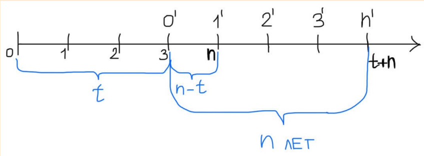


$$S_{pre} = S_{post}\cdot(1+i)^r$$

$$P_{pre} = P_{post}\cdot(1+i)^r$$

S_{post} и P_{post} также рассчитываются по соответствующим формулам ренты с периодом ренты r

Отложенная рента



Рента, которая начинает выплачиваться через t лет после некоторого начального периода времени

Важно

Такой сдвиг во времени:

★**не влияет** на величину **наращенной** суммы -> от сдвига начала ренты сам период, в течение которого наращиваются %, не изменится, а просто сдвинется вперёд

★**влияет** на величину **дисконтированной** суммы -> сдвиг начала ренты приведет к увеличению периода, за который дисконтируется рента, на величину t (время отсрочки ренты) -> теперь мы дисконтируем ренту за n+t лет (а не n лет).

Формула

$$P_t = \frac{P}{(1+i)^t}$$

Подходит и для аннуитета постнумерандо, и для аннуитета пренумерандо

Начисление простых %

Особенность ренты: % за период начисляются лишь на основной (инвестированный) капитал, т.е. **% не реинвестируются**.

Формулы выводятся на основе **арифметической прогрессии**.

Арифметическая прогрессия

Это последовательность, в которой каждый последующий член можно найти, если к предыдущему члену прибавить одно и то же число

Параметры прогрессии

a_1 - первый член арифметической прогрессии

a_n - n-ый член арифметической прогрессии

d - число, которое последовательно прибавляется к каждому последующему члену прогрессии

n-ый член прогрессии

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$$

К a_1 еще не прибавляется d

d прибавляется к **каждому из оставшихся** (n-1) членов прогрессии

Сумма прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + \overbrace{a_1 + d\cdot(n-1)}^{a_n}}{2}\cdot n$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Наращенная сумма

$$S_{post} = R\cdot(1+i\cdot(n-1)) + R\cdot(1+i\cdot(n-2)) + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{R\cdot(1+i)}_{d} + \underbrace{R}_{a_1}$$

$$a_1 = R;\ d = R\cdot i;\ a_n = R + R\cdot i\cdot(n-1)$$

$$S_{post} = \frac{R + R + R\cdot i\cdot(n-1)}{2}\cdot n =$$

$$= R\cdot n\cdot\left[1 + \frac{i\cdot(n-1)}{2}\right]$$

Аннуитет постнумерандо

Дисконтированная сумма

$$P_{post} = \frac{R}{(1+i\cdot n)} + \frac{R}{(1+i\cdot(n-1))} + \ldots + \frac{R}{1+i} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{R}{(1+i\cdot t)}$$

Аннуитет постнумерандо

Банк. дисконтирование

$$P_{post\ БАНК.} = R\cdot(1-d\cdot n) + R\cdot(1-d\cdot(n-1)) + \ldots + R\cdot(1-d) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} R\cdot(1-d\cdot t)$$

$$a_1 = R - R\cdot d;\ a_n = R - R\cdot d - R\cdot d\cdot(n-1)$$

$$P_{post} = \frac{R - R\cdot d + R - R\cdot d - R\cdot d\cdot(n-1)}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2R - 2R\cdot d - n\cdot R\cdot d + R\cdot d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2R - R\cdot d(1+n)}{2}\cdot n =$$

$$= R\cdot n\cdot\left[1 - \frac{d\cdot(1+n)}{2}\right]$$

Банковское дисконтирование - должнику в начале срока выдается сумма, уменьшенная на сумму процентов (т.е. сумма с дисконтом (скидкой) d), а возврату в конце срока подлежит полная сумма.

Переменная рента

Рента, при которой размеры членов ренты изменяются во времени

Случай 1

Абсолютное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют арифметическую прогрессию:
R; R+a; R+2a;...; R+a*(n-1)
Каждый последующий член ренты увеличивается на одно и то же число a

p=1; m=1

$$S_{post}=\left(R+\frac{a}{i}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{na}{i}$$

$$P_{post}=\left(R+\frac{a}{i}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}-\frac{na\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$$

p>1; m=1

$$S_{post}=\sum_{t=1}^{n\cdot p}\frac{R+a\cdot(t-1)}{p}\cdot(1+i)^{n-\frac{t}{p}}$$

$$P_{post}=\sum_{t=1}^{n\cdot p}\frac{R+a\cdot(t-1)}{p}\cdot(1+i)^{-\frac{t}{p}}$$

Члены ренты: R/p; (R+a)/p; (R+2a)/p; ...; (R+(n*p-1*)a)/p.

Случай 2

Относительное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют геометрическую прогрессию:
R; R*q; Rq*^{2}; ...; R*q^{n-1}
Каждый последующий член ренты больше предыдущего в q раз

p=1; m=1

$$S_{post}=R\cdot\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}$$

$$P_{post}=R\cdot\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n-1}{q-(1+i)}$$

p>1; m=1

$$S_{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{q^{n\cdot p}-(1+i)^n}{q-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

$$P_{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\frac{q^{n\cdot p}}{(1+i)^n}-1}{q-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

Члены ренты: R/p; (R/p)*q; (R/p)*q^2; ...; (R/p)*q*^{n}p-1

Случай 3

Разовые изменения платежей в потоке

Принцип вычисления

Наращенная и дисконтированная стоимость определяется **путем прямого счета**

Аннуитет, особые случаи Cheat Sheet

by Blodwyn (Blodwyn) via cheatography.com/198206/cs/44083/

Вечная рента

Платежи по ренте осуществляются в течение **неограниченного срока** (бесконечно)

Пример: вы хотите положить на вклад в банк такую сумму, чтобы при фиксированной годовой % ставке регулярно получать R руб./год в течение неограниченного срока в будущем.
Чтобы узнать, сколько первоначально положить в банк на вклад, используем формулу вечной ренты.

Будущая стоимость ренты

Нет смысла вычислять, т.к. платежи по ренте осуществляются в течение неограниченного срока

Настоящая стоимость

$$P = \frac{R}{i}$$

Поздравляю!

Ты дошел(-ла) до конца. Ты смелый котик.