Procesos Estocasticos Cheat Sheet

by andreyhorta35762 via cheatography.com/159146/cs/36544/

Definiciones

Proceso Estocástico

Colección Infinita de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad común *(Ω, F, P)* que esta indexada por un parametro (i.e. tiempo)

Estado

Valores que toman las variables aleatorias **Xtn**

Espacio de Estados del Proceso

Conjunto de todos los posibles estados. Discreto $\{X_n, n = 0, 1, 2...\}$ o Continuo $\{X_{tn}, t \in T\}$ y $\{X_t, t \in T\}$.

Trayectoria

Recorrido de un evento específico. Dado $\omega \in \Omega$, la trayectoria de ω es $f: t \to Xt(\omega)$

Distribución n-dimencional del proceso

$Ft1...tn\ (x1,..., xn) := P(X_{t1} \leq x_1,..., X_{tn} \leq x_n)$, donde X un P.E. real y $\{t_1, t_2,..., t_n\} \subset T$ donde $t_1 < t_2 <...< t_n$

P.E. con Incrementos Independientes

Cuando las variables aleatorias $X_{t2} - X_{t1}$, $X_{t3} - X_{t2}$, ..., $X_{tn} - X_{tn-1}$ son independientes dado que $\forall t_1, t_2,..., t_n$ y $t_1 < t_2 < ... < t_n$

P.E. Estacionario de orden n Se puede trasladar en el tiempo y la distribucion no cambia

Sea $\forall t1, t2,..., tn$ y las distribuciones conjuntas de $X_{t1}, X_{t2}..., X_{tn})$ y $(X_{t1+h} + h), X_{t2+h}..., X_{tn+h})$ son iguales para todo $h>0$

P.E. Estacionario de orden n

Si el proceso es estacionario de orden n para todo $n \in N$,

P.E. con Incrementos Estacionarios

Definiciones (cont)

Si para cualesquiera $0 \leq s \leq t$ y $0 \leq h$, se cumple que $X_t - X_s$ tiene la misma distribucion que $X_{t+h} - X_{s+h}$

P.E. de segundo orden o regular

Si $E\,[X_t]\,2 < \infty$ para todo $t \in T$. Ademas Las funciones de media $mX\,(t) = E\,(X_t)$ y de covarianza $CX\,(s, t) = Cov\,(X_s\,, X_t)$

P.E. ortogonal

Si es P.E. regular y $E\,[X_t X_s]=0$, $\forall t,s, \in T$ y $t \neq s$.

P.E. Estacionario

Si es P.E. regular y su función de media *mX(t)* es independiente de t y si su función de covarianza *CX(s, t)* es una función que depende sólo de |t − s|, para todo t,s,esto $C(s, t) = Cov(X(s), X(t)) = f(t - s)$.

P.E. Evolutivo

Que no es Estacionario

Ejemplos Especiales de P.E.

Martingala El valor esperado del *X_{n+1}* dado que paso por n valores dados, es el ultimo valor observado *x_{n}*

Si *E(X_{n+1} | X_{0}=x_{0},...,X_{n}=x_{n})=x_{n}*

Proceso de Levy

Cuando los incrementos son independientes y estacionarios

Proceso Gausiano

Si para cualesquiera n tiempos crecientes, se tiene que *(X(t1), X(t2)..., X(tn))* tiene una distribucion normal multivariada

Tipos de P.E.

PDED	Tiempo Discreto + Espacio Discreto
PDEC	Tiempo Discreto + Espacio Continuo
PCED	Tiempo Continuo + Espacio Discreto
PCEC	Tiempo Continuo +Espacio Continuo

Propiedades P.E

$X=Y$ sii $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ con $\forall t \in T$ y $\forall \omega \in \Omega$

X y Y son **estocásticamente equivalentes** si $P(X_t = Y_t) = 1$ y $\forall t \in T$.

X y Y son **estocásticamente equivalentes en el sentido amplio** si $\forall\, n \in N$, $\forall\, \{t_1,..., t_n\} \subset T$ y $\{B_1,..., B_n\} \subset 2^{\Omega}$ se satisface: $P(X_{t1} \in B_1, ..., X_{tn} \in B_n) = P(Y_{t1} \in B_1,..., Y_{tn} \in B_n)$

X y Y se dicen **indistinguibles** si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es, $P(X_t = Y_t\,, t \in T) = 1$.

Aclaraciones

Sea $X = \{Xt, t \in T\}$ un proceso estocástico

X es real si las v.a. Xt son de valor real para todo $t \in T$

X es complejo si las v.a. Xt son de valor complejo para todo $t \in T$

Si T es finito o contable, entonces es proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.

Si T es un intervalo de la recta real entonces es proceso con parámetro de tiempo continuo.

Si $T \subseteq Rn$ con $n>1$ entonces el proceso se denomina campo aleatorio.

Cadena de Markov

Un P.E. Real X si para todo n tiempos crecientes y $a, b \in R$ *con* $a < b$, se satisface que **P ($X_t \in (a, b]$ | X_{t1}= x1, X_{t2} = x2, ,..., X_{tn}) = P ($X_t \in (a, b]$ | X_{tn})**

Es decir, solo importa el estado inmediatamente anterior X_{tn} para determinar el estado siguiente X_{tn+1}

Equivalente a $P(X_0 = i_0, ..., X_{n+1} = i_{n+1}) = P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) ...P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$

Distribucion Inicial

Distribucion de la variable X_0, es decir {P (X_0 = 0), P(X_0 = 1), ...}

Probabilidad de transicion

Probabilidad de que pase de *i* a *j* en un paso (del tiempo *n* al tiempo *n+1*) es $P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}(1)$

Matriz de transicion en un paso

Sea $P=[p_{ij}]=P_{ij}(1)$. Es la matriz estocastica. El *i* es la salida y el *j* es la llegada